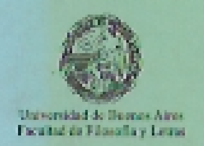
4

Temas de cátedra

Gladys Palau

Introducción filosófica a las lógicas no clásicas

BIBLIOTECA de EDUCACIÓN





4

Temas de cátedra

Gladys Palau

Introducción filosófica a las lógicas no clásicas

BIBLIOTECA de EDUCACIÓN

Esta obra representa el primer trabajo sobre las lógicas no clásicas realizado en lengua castellana y desde una perspectiva filosófica. Con el propósito de argumentar a favor del pluralismo lógico, la autora aborda las lógicas intuicionista, de la relevancia, multivaluada y paraconsistente y muestra cuáles son las motivaciones filosóficas que las originaron.

En la dilucidación de sus propiedades específicas se muestran, en forma sencilla y comprensible, los formalismos con los que se opera en estas lógicas no clásicas.

Finalmente, la obra analiza la relación de consecuencia característica de cada uno de estos formalismos y muestra que sus divergencias respecto de la relación de consecuencia de la lógica clásica no impiden que todos ellos constituyan lógicas genuinas.

Gladys Palau, doctora en Filosofía, en la especialidad de Lógica, por la Universidad de Buenos Aires, es profesora titular de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires y de la Facultad de Humanidades de la Universidad Nacional de La Plata. Además es investigadora en el Instituto de Filosofía de la UBA y autora (junto con José A. Castorina) del libro *Introducción a la lógica operatoria de Piaget* y de numerosos artículos publicados en revistas y compilaciones.



250004





Introducción filosófica a las lógicas no clásicas

Gladys Palau

Temas de cátedra

BIBLIOTECA de EDUCACIÓN

Introducción filosófica a las lógicas no clásicas

Gladys Palau



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Filosofía y Letras



Diseño de cubierta: Sebastián Puiggrós

Primera edición, octubre del 2002, Barcelona

Paseo Bonanova, 9 1º-1ª
08022 Barcelona, España
Tel. 93 253 09 04
Fax 93 253 09 05
Correo electrónico: gedisa@gedisa.com
http://www.gedisa.com

ISBN: 84-7432-002-X
Depósito legal: B. 39963-2002

Impreso por: Romanyà/Valls
Verdaguer, 1. 08076
Capellades (Barcelona)

Impreso en España
Printed in Spain

A Raúl Orayen
primero amigo,
después maestro.

Índice

3. La lógica intuicionista y la crítica al razonamiento matemático

4. La lógica de la relevancia y la crítica a la deducibilidad clásica

5. Las lógicas plurivalentes y la crítica a la semántica clásica

6. Las lógicas paraconsistentes y la crítica al principio de no contradicción

Prólogo

Cuando finalicé mi tesis doctoral, hace ya bastantes años, se recomendó su publicación e incluso se me ofreció su edición en idioma inglés. El trabajo de transformarla en libro para luego traducirla al inglés superó en esos momentos el límite de mis esfuerzos y, por ese motivo, rechacé el ofrecimiento. También contaba con otros motivos. Los temas que en ella trataba eran de gran actualidad y estaban siendo trabajados en varios centros de investigación internacionales. Pensé que, para cuando yo terminara la tarea requerida, ya habrían sido publicados muchísimos trabajos seguramente mejores que el mío y que la originalidad de las tesis que yo defendía ya no sería tal. El tiempo me dio la razón y por ello no me arrepiento de la decisión tomada. Sin embargo, al desear transmitir en mis clases o analizar en seminarios muchos de los temas contemplados en la tesis, me encontré con que no existía ningún tipo de material en idioma español que pudiera utilizarse con el fin de iniciar a los alumnos de filosofía en el estudio de las lógicas no clásicas. Aún hoy, aparte de un par de textos sobre lógica modal, no hay publicaciones en idioma español sobre lógicas no clásicas en general, cuya presentación sea accesible para alumnos sin formación matemática pero con formación elemental en lógica y que, además, incluyan los aspectos filosóficos que justifiquen agrupar a estas lógicas bajo el nombre de *lógica filosófica*. Ante la magnitud de la carencia, decidí aportar mi esfuerzo para cubrirla al menos en parte. Para ello, decidí no incluir temas excesivamente técnicos, tomar sólo aquellos que entendí fundamentales para la comprensión de cada sistema lógico tratado, expresarlos mediante formalismos sencillos y, dada la gran cantidad de nuevas aporta-

ciones existentes en la literatura lógica actual, exponerlos en forma actualizada.

El primer capítulo contiene los elementos de lógica indispensables para comprender los temas incluidos en los capítulos posteriores. El capítulo 2 lo hemos destinado a brindar una exposición lo más sencilla posible de la noción de consecuencia lógica abstracta en las versiones de Tarski y Gentzen y a presentar las nociones básicas de la semántica de la lógica clásica en términos de valuaciones y mundos posibles. Los capítulos destinados al estudio de las lógicas no clásicas seleccionadas, o sea, la lógica intuicionista, la lógica de la relevancia, las lógicas multivaluadas y la lógica paraconsistente tienen una estructura similar. El estudio de cada una se comienza en todos los casos enumerando las principales motivaciones filosóficas que las originaron, para luego presentar un sistema lógico en particular, elegido como el ejemplo paradigmático de la familia de sistemas lógicos que involucra. De inmediato se pasa a dar sus características intuitivas, después su presentación formal y, finalmente, se expone la operación de consecuencia lógica correspondiente a cada tipo de lógica, mostrando su grado de divergencia respecto de la lógica clásica. Dada mi convicción acerca del papel esencial que la lógica tiene respecto de la constitución de los procesos cognitivos, en los capítulos pertinentes he introducido una sección dedicada a temas que, si bien desde un punto de vista lógico estricto son temas marginales, no lo son desde una posición que pretenda reforzar los vínculos entre lógica y ciencia cognitiva. También todos los capítulos culminan con una sección, denominada *Lecturas sugeridas,* en la cual se recomiendan los trabajos para continuar leyendo, en caso de desear seguir profundizando algún tema. De existir textos en español del nivel apropiado, estos han sido incluidos. Finalmente, el último capítulo está destinado a esbozar algunas reflexiones sobre el pluralismo lógico que subyace en todo el texto y se ha incluido con el único fin de motivar problemas filosóficos que impulsen la profundización en el estudio de temas de lógica filosófica.

Deseo terminar estas palabras agradeciendo a mis maestros Gregorio Klimovsky, Rolando García, Carlos Alchourrón y Raúl Orayen por el deseo de estudiar estos temas que supieron despertar en mí y también por lo que aprendí de ellos. Por último, el agradecimiento a todos mis alumnos de la universidad, quienes, en su escuchar silencioso y atento, en sus oportunas y continuas preguntas o en sus inteligentes señalamientos, me permitieron repensar y reflexionar constantemente acerca de todo lo estudiado. Con relación a este texto, en ellos y en todo aquel que por distintos motivos pretenda acceder a la lógica filosófica, está la última palabra.

Buenos Aires, junio de 2002

Símbolos

$\rightarrow$	Condicional material
$\vee$	Disuyunción
$\wedge$	Conjunción
$\leftrightarrow$	Bicondicional material
$\neg$	Negación clásica
$\vdash$	Deductor
$\vDash$	Consecuencia lógica
$\bot$	Lo falso o lo absurdo
$\dashv$	Involución (desenvolvimiento)
$\Diamond$	Operador de posibilidad
$\Box$	Operador de necesidad
$\Rightarrow$	Implicación estricta
$\twoheadrightarrow$	Implicación relevante
$\sim$	Negación concreta
#	Tercer valor de verdad
$\circ$	Estabilizador
$\oplus$	Paso erróneo en una deducción
$\aleph_0$	Cardinal de los números naturales
$2^{\aleph_0}$	Cardinal de los números reales
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\in$	Pertenencia
$\subset$	Inclusión
$\subseteq$	Inclusión impropia
V	Función valuación
A, B, C…	Fórmulas
X, Y, Z...	Conjuntos de fórmulas
Γ, ϕ, ψ, Ω...	Conjuntos de fórmulas (en Cálculo de Secuentes)

Abreviaturas*

$A\dashv / \dashv A$	Atenuación en el prosecuente/ postecuente
$C\dashv / \dashv C$	Contracción en el prosecuente/ postsecuente
$P\dashv / \dashv P$	Permutación en el prosecuente/postsecuente
AD	Adición
Adj	Adjunción o Conjunción
B3, K3, Ł3	Lógica trivalente de Boschvar/Kleene/ Łukaziewicz
Cn	Consecuencia lógica
DN	Principio de doble negación
$I/E_{\wedge}$	Introducción/Eliminación de la conjunción
$I/E_{\vee}$	Introoducción/Eliminación de la disyunción
$I/E_{\to}$	Introducción/Eliminación del condicional
$I/E_{\neg}$	Introducción/Eliminación de la negación
ECQ	*Ex contradictione quodlibet*
EFSQ	*Ex falsum sequitur quodlibet*
$H_{\to}$ H_{+} H_{P}	Cálculo implicacional/positivo/ proposicional de Hilbert
J	Lógica intuicionista
L	Lenguaje formal
LC	Lógica clásica
LD	Lógica (paraconsistente) dialéctica de N. C. A da Costa
LP	Lógica (paraconsistente) trivalente de Priest
M	Modelo
M	Conjunto de mundos posibles/matriz

* No se incluyen las abreviaturas usadas sólo en un capítulo.

MP	*Modus Ponens*
m_1, m_2...	Mundos posibles
NC, NJ, NR	Cálculo de deducción natural para LC/J/R
PTE	Principio del Tercero Excluido
PNC	Principio de no-contradicción
Q	Base deductiva/conjunto de inferencias
R	Lógica relevante
Rab	Reducción al absurdo
RA	Refuerzo del Antecedente
$\mathfrak{R}$	Relación de acesibilidad
S	Sistema lógico
SC, SJ, SR	Cálculo de Secuentes para LC/J/R
SD	Silogismo Disyuntivo
SH	Silogismo Hipotético
SM	Simplificación
TD	Teorema de la Deducción

1
Introducción

1.1 La constitución de la lógica clásica

Ya es un lugar común sostener que la lógica, en tanto ciencia formal, nació con Aristóteles, fundamentalmente con su teoría sobre el silogismo categórico. Ésta fue expuesta en los Primeros Analíticos y en ella se encuentran delineadas, aunque en forma no explícita, las nociones lógicas básicas de inferencia, validez lógica y deducción. Posteriormente, los lógicos estoicos y megáricos ampliaron la lógica de «términos» aristotélica, indagando acerca de los diversos tipos de nexos entre proposiciones e identificando las hoy llamadas conectivas proposicionales y las principales reglas lógicas que las rigen. En otras palabras, sentaron las bases semánticas de la actual lógica proposicional. En particular, deben destacarse el condicional filónico y el condicional diodórico. El primero por ser el origen del actual condicional material y de sus reglas asociadas *Modus Ponens* y *Modus Tollens* y el segundo, por haber sido señalado por muchos como la base del condicional estricto de la lógica modal. Sin embargo, el desarrollo de la lógica no siguió un camino gradual ya que, después de los logros aristotélicos y estoicos, sobrevino, con relación a resultados estrictamente lógicos, un largo período de declinación y estancamiento, interrumpido sólo por importantes pero aisladas contribuciones. Entre ellas merecen destacarse: la teoría de la *consequentiae* en la Edad Media, la obra de juventud de Leibniz, *Ars combinatoria* de 1664, en la cual sostiene la posibilidad de construir un lenguaje simbólico artificial cuya estructura fuese reflejo del pensamiento y permitiera liberar al estudio lógico de las vaguedades del lenguaje ordinario, y los aportes de B. Bolzano, en

cuyas obras *Wissenschaftslehre* (*Teoría de la ciencia*) de 1837 y *Paradoxien des Unendlichen* (*Paradojas del infinito*) de 1851 expuso originales ideas que tuvieron una peculiar importancia en el desarrollo de la lógica, como por ejemplo, que una proposición es un objeto real cuya verdad o falsedad es independiente de cualquier contexto, i.e., son independientes del sujeto que las piensa; que el concepto de verdad es objetivo, i.e., no es ni epistémico ni psicológico; y que una proposición es universalmente válida cuando todas sus «variantes» son verdaderas.

Sin embargo, recién en el siglo XIX la lógica formal se constituye como ciencia independiente de la filosofía, en virtud de diversos factores. Por un lado, el desarrollo alcanzado por el álgebra, en cuyo contexto surge el *álgebra de la lógica*, tal como se expone en las obras de los algebristas ingleses George Boole y Augustus De Morgan, basadas en la idea básica de que las fórmulas algebraicas pueden perfectamente ser usadas para expresar relaciones lógicas. Por el otro, la problemática planteada acerca de la fundamentación de la matemática, en cuyo seno aparecen, en 1879, los *Begriffschriff* (*Notación conceptual*) de Frege. Sin lugar a dudas, ésta constituye la base fundacional de la lógica moderna, ya que en ella se expone por primera vez un sistema de lógica totalmente formalizado. La lógica de Frege fue posteriormente perfeccionada en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, escrita entre 1910 y 1913 con el fin principal de llevar a cabo el programa fregeano de derivar la matemática de la lógica, pero evitando la aparición de las paradojas que Russell mismo había encontrado en *Grundgesetze der Arithmetik* (*Leyes básicas de la aritmética*) de Frege. Hoy en día, esta lógica es conocida con el nombre de *lógica matemática o lógica simbólica* o, simplemente, *logística*. Por último, a la constitución definitiva de este enfoque deben agregarse las investigaciones de Hilbert, en cuyo primer trabajo sobre la fundamentación de la geometría, *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de la geometría*) de 1899, introduce el término *metamatemática* para referirse a la disciplina que toma como investigación, desde un metalenguaje específico, al lenguaje

objeto de la matemática. Nótese que es precisamente dentro del programa formalista de Hilbert que se producen los trascendentes resultados en torno a la completitud de la lógica de Primer Orden (i.e., lógica de predicados o de cuantificadores), la incompletitud de la aritmética de K. Gödel y los de Turing y Church con relación a la indecidibilidad de esta misma lógica, origen teórico de las ciencias de la computación. Por último, a fin de completar la descripción del proceso de constitución de la lógica clásica, deben sumarse las contribuciones de Tarski al campo de la semántica de la lógica, específicamente sus trabajos The Concept of Truth in Formalized Languages (1933) y On the Concept of Logical Consequence (1936).

Algunos acuerdan en considerar lógica clásica a todo sistema lógico equivalente al formulado en los *Principia Matematica.* Otros, consideran que es más apropiado llamar a esta lógica, *lógica estándar,* habida cuenta que ella constituye la lógica básica que se enseña en los primeros cursos de lógica. En nuestra exposición adoptaremos el nombre de lógica clásica ya que es el más usado en la literatura lógica actual.

Pese al impacto que tuvo esta lógica, especialmente en el campo de la fundamentación de las ciencias formales y aun en la metodología de las ciencias empíricas, en los últimos cuarenta años del siglo XX comenzaron a desarrollarse nuevos sistemas lógicos en áreas de problemas, en su mayoría filosóficos, para cuyo análisis la lógica clásica resultaba insuficiente o inadecuada. Ejemplos de estas nuevas lógicas son la lógica modal, la lógica intuicionista, las lógicas condicionales, las lógicas relevantes, las lógicas difusas, las paraconsistentes, etc. éstas, precisamente por sus motivaciones filosóficas, actualmente suelen agruparse bajo el nombre genérico de *lógica filosófica.* De ahí en más, los problemas que comenzaron a preocupar a lógicos y filósofos de la lógica se centraron en la reflexión acerca de qué es la lógica y en la pregunta por las relaciones, tanto sintácticas como semánticas, entre estas nuevas lógicas y la lógica clásica. El artículo de I. Hacking «What is logic?» (1979), es hoy en día el primer referente con relación a la primera cuestión.

Respecto de la segunda, las obras más conocidas en habla hispana son seguramente las de Susan Haack, *Deviant Logic* (1977) y *Philosophy of Logics* (1978). Es precisamente en la primera de ellas donde se expone el primer criterio para establecer una clasificación de la gran variedad de sistemas lógicos diferentes de la lógica clásica, cuyo número en esos años era considerablemente menor que en el presente.

Dado el objetivo del presente libro, no trataremos la cuestión estrictamente filosófica acerca de qué debe entenderse por lógica, sino que comenzaremos exponiendo qué se entiende por *sistema lógico,* ya que actualmente esta es la forma en la que se expresa cualquier tipo de lógica.

1.2 ¿Qué es un sistema lógico?

Dada la reconocida naturaleza formal de la lógica y la indiscutida aceptación de su expresión simbólica, todo sistema lógico debe constar de un *lenguaje formal* (L). A su vez, éste se compone de un vocabulario y una sintaxis. El vocabulario está formado por signos descriptivos (i.e., términos categoremáticos), símbolos lógicos (i.e., términos sincategoremáticos) y signos de puntuación, los cuales se utilizan para determinar el alcance de los signos lógicos. La sintaxis de L consiste en un conjunto de reglas destinadas a especificar las combinaciones de signos (i.e., expresiones) permitidas en dicho lenguaje; en otras palabras, a determinar las expresiones que serán consideras fórmulas de L. El vocabulario y las fórmulas constituyen el lenguaje objeto del sistema en cuestión.

En síntesis, todo lenguaje formal L consta de:

a) Vocabulario:
   (i) un conjunto de símbolos no lógicos (i.e., descriptivos)
   (ii) un conjunto de símbolos lógicos (i.e., constantes lógicas)
   (iii) signos de puntuación

b) Un conjunto de reglas de formación de expresiones bien formadas de L (i.e., fórmulas).

El ejemplo más sencillo de lenguaje formal es el de la lógica proposicional clásica, en el cual los símbolos descriptivos (o no-lógicos) son las variables o letras proposicionales p, q, r, ...; los símbolos lógicos (o constantes lógicas) son las conectivas proposicionales $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$; y las reglas de formación establecen que las letras proposicionales son fórmulas y que las fórmulas compuestas a partir de fórmulas mediante conectivas proposicionales también son fórmulas. Por ejemplo, son fórmulas de L, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \wedge (q \rightarrow r)$, $(p \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \rightarrow p$, etc. Debemos recordar que no es necesario que en el lenguaje estén todas las conectivas proposicionales, sino que pueden tomarse como primitivas algunas de ellas y luego introducir las restantes mediante las definiciones correspondientes. Sin embargo, para obtener un sistema lógico, aun en el plano sintáctico, se hace necesario agregar al lenguaje L un conjunto de reglas de inferencia, cuyo fin es establecer cómo una fórmula puede inferirse a partir de otra u otras ya dadas (i.e., axiomas). Esta regla es, en general, el *Modus Ponens* y, si no se parte de axiomas esquemas, debe agregarse la regla de Sustitución. Así, toda fórmula que se obtenga a partir de los axiomas, mediante la aplicación de una regla de inferencia, esto es, que ha sido probada en el sistema, es considerada un teorema del mismo. En otras palabras, una fórmula A es teorema (simbólicamente $\vdash A$) en un sistema cuando hay una derivación (i.e., deducción) de A a partir del conjunto de los axiomas.

Cuando los símbolos del lenguaje de un sistema carecen de significado, el sistema suele recibir la denominación de *cálculo*. De ahí que la cuestión que surge naturalmente consista en preguntarse si un mero cálculo es suficiente para constituir un sistema lógico. La opinión tradicional en filosofía de la lógica ha sido negativa, al extremo de que el mismo Carnap, pese a su primer inclinación por el enfoque sintáctico de la lógica expuesto en *The Logical Syntax of Language* (1937) y después de notificarse de los trabajos de Tarski,

incorporó la dimensión semántica en sus conocidas obras *Introduction to Semantics* (1942) y *Meaning and Necessity* (1947). De ahí en más, a fin de obtener un sistema lógico, todo cálculo debe incorporar una semántica mediante la cual se asigne significado tanto a los términos descriptivos como a los lógicos. La asignación de significado a los signos no-lógicos o descriptivos se realiza mediante la construcción de una interpretación. En líneas generales, dotar de una interpretación a un cálculo, consiste en: 1) elegir un conjunto no vacío de entidades extralógicas que constituirá el dominio (D) de la interpretación; y 2) definir una función que asigne un elemento o un subconjunto del dominio a cada signo descriptivo de L.

Como es sabido, la interpretación estándar de la lógica clásica sigue el lineamiento de la concebida por Tarski en los trabajos antes mencionados y está basada en el concepto semántico de verdad, el cual a su vez se inspira en el concepto de verdad por correspondencia de Aristóteles. Así, de acuerdo a la concepción tarskiana, dar una interpretación I de la lógica proposicional consiste en:

1. Elegir como dominio de I al conjunto formado por los valores de verdad, Verdad (designado por el número 1) y Falsedad (designado por el número 0), o sea: D = {1,0};

2. Asignar a cada letra proposicional de L el elemento 1 o 0, o sea, I(p) = 1 o I(p) = 0.

A continuación se dan las condiciones de verdad para cada oración del lenguaje L mediante una función valuación V que asigna un valor de verdad a la oración molecular según sea la valuación de las oraciones atómicas que la componen, a saber:

(i) $V(\neg A) = 1$ sii $V(A) = 0$ (*)
$V(\neg A) = 0$ sii $1(A) = 1$
(ii) $V(A \wedge B) = 1$ sii $V(A) = 1$ y $V(B) = 1$
(iii) $V(A \vee B) = 1$ sii $V(A) = 1$ o $V(B) = 1$

(iv) $V(A \rightarrow B) = 0$ sii $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$
(v) $V(A \leftrightarrow B) = 1$ sii $V(A) = V(B)$

* *sii* abr. de *si y sólo si.*

Como el lector ya se habrá dado cuenta, estas cláusulas son las que se encuentran en la base de las tablas de verdad de cada una de las conectivas proposicionales. Nótese además que el significado de las conectivas se ha dado en forma indirecta, esto es, que el significado de las mismas está fijado por las *condiciones de verdad* de las oraciones en las que ellas aparecen. En otras palabras, las conectivas proposicionales son extensionales o veritativo funcionales (i.e., funciones de verdad), ya que el valor de verdad de una fórmula compuesta o molecular depende del valor de verdad de sus fórmulas atómicas.

Desde el enfoque semántico, un teorema es una verdad universalmente válida, o sea, una fórmula que es verdadera bajo cualquier interpretación. Para el caso particular de la lógica proposicional, las fórmulas universalmente válidas reciben el nombre de tautologías. Por su parte, las reglas de inferencia tienen la particularidad de preservar la verdad, es decir de transmitir la verdad de las premisas a la conclusión. En particular, en un sistema de lógica proposicional, dado que los axiomas son tautologías, las reglas de inferencia transmiten la tautologicidad a los teoremas y por ello, en lógica clásica, es posible identificar un sistema lógico proposicional por el conjunto de sus tautologías, en forma similar a lo que se hace en el nivel sintáctico, cuando se lo identifica por el conjunto de sus teoremas.

Hay dos resultados metalógicos de la lógica clásica en general que es necesario tener siempre presente, ya que relacionan la dimensión sintáctica y semántica de un sistema lógico, a saber: la lógica clásica (i.e., la lógica de Primer Orden) es consistente (i.e. correcta) y es completa (Gödel, 1930). En particular, referidos a la lógica proposicional, el primer resultado afirma que si una fórmula A tiene una demostración en un sistema lógico proposicional (i.e., es un

teorema), entonces es universalmente válida (i.e., una tautología). En símbolos: Si $\vdash A$ entonces $\models A$. El segundo afirma que, si una fórmula A es una tautología, entonces A tiene una prueba en el sistema. Simbólicamente: Si $\models A$ entonces $\vdash A$. Por el primer resultado se demuestra que la lógica proposicional es consistente y mediante el segundo, que la lógica proposicional es completa.

1.3 La lógica en tanto conjunto de verdades lógicas

Los primeros sistemas lógicos fueron construidos bajo la forma de sistemas axiomáticos similares al expuesto en la sección anterior, es decir, bajo el modelo de Frege-Russell-Hilbert, el cual se convirtió en el paradigma de toda la investigación lógica hasta los últimos veinticinco años del siglo XX. Las principales e inigualables obras de la lógica de Primer Orden, tales como las de Church (1956), Kleene (1964) y Mendelson, (1963), entre otras, están realizadas en la versión axiomática formalizada tal como fuera impuesta por Hilbert. Más aún, existen interesantes y rigurosas versiones axiomáticas de la lógica silogística aristotélica, tales como las de Prior (1955), Bochenski (1956), y Łukasiewicz (1957).

Sin embargo, a nuestro propósito, interesa reproducir el cálculo de la lógica proposicional construido por Hilbert y Bernays en *Grundlagen der Mathematik* (H_P) (*Fundamentos de la matemática*) de 1934. Este sistema tiene la característica de dar los axiomas por separado para cada conectiva lógica, y por lo tanto, identificar los fragmentos del cálculo correspondientes a cada conectiva, i.e, el conjunto de teoremas que se deducen de cada grupo de axiomas. Sugerimos al lector tener este sistema presente, ya que frecuentemente haremos referencia a él.

El lenguaje de H_P, tanto en el vocabulario como en la sintaxis, es similar al dado en el párrafo anterior. La única regla de inferencia es el *Modus Ponens*, ya que la formulación de los axiomas como axiomas esquemas (i.e., mediante letras metalingüísticas) permite

prescindir de la regla de Sustitución. Los axiomas esquemas son los siguientes:

H1 $A \to (B \to A)$
H2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
H3 $(A \wedge B) \to A$
H4 $(A \wedge B) \to B$
H5 $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \wedge B)))$
H6 $A \to (A \vee B)$
H7 $B \to (A \vee B)$
H8 $((A \to C) \to (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$

Los dos primeros axiomas caracterizan el condicional material y el conjunto de teoremas que se deducen de ellos constituyen el fragmento implicacional de la lógica proposicional clásica ($H_{\to}$); H3-H5 caracterizan la conjunción y los tres últimos caracterizan la disyunción, y el conjunto de los teoremas que se deducen de H1-H8 constituyen el fragmento positivo de la lógica proposicional H_{+}. Para obtener la lógica proposicional clásica, o sea el sistema H_P, se hace necesario agregar los axiomas característicos de la negación de la lógica clásica, a saber:

H9 $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
H10 $\neg(A \to A) \to B$
H11 $\neg\neg A \to A$

En esta presentación axiomática, como en cualquier otra al estilo Hilbert, la lógica es considerada un conjunto de fórmulas, donde algunas son consideradas axiomas y las restantes (i.e., teoremas), se deducen de los axiomas mediante la aplicación de reglas de inferencia. De acuerdo a la interpretación clásica en términos de valores de verdad, ya dijimos en la sección anterior que las reglas de inferencia preservan la tautologicidad y por ello, tanto los axiomas como los teoremas son tautologías, o sea, verdades lógicas. Desde

esta perspectiva, resulta natural que durante mucho tiempo se haya aceptado que, siguiendo la concepción leibniziana en torno a las verdades necesarias de la lógica, el objeto de ésta sea precisamente la búsqueda de verdades lógicas y que, además, un sistema lógico se haya identificado con el conjunto de sus teoremas, o sea, con el conjunto de sus verdades lógicas, tal como expresamente lo afirma Quine en *Philosophy of Logic* (1970).

1.4 La lógica en tanto conjunto de inferencias

Sin embargo, en 1934, un miembro de la escuela de Hilbert, G. Gentzen (1955) cuestionó la versión axiomática por su falta de naturalidad en la representación de la deducción y formuló la lógica clásica, no ya como conjunto de teoremas o verdades lógicas, sino como conjunto de reglas de inferencia (i.e., inferencias válidas), retomando de este modo la concepción aristotélica de la lógica centrada en el concepto de argumento válido. Los sistemas lógicos creados por Gentzen son conocidos como sistemas de Deducción Natural, debido a su intención de brindar una idea de deducción más cercana a la del pensamiento natural. Los sistemas de deducción natural, tal como los formuló Gentzen o con modificaciones no esenciales, se encuentran explicados detalladamente en todos los textos de lógica actuales, ya que en estos momentos la versión inferencial de la lógica es aceptada como la más apropiada para la presentación de la lógica clásica con fines didácticos e incluso filosóficos.

La versión inferencial tiene en común con la axiomática, el vocabulario del sistema en cuestión, pero, a diferencia de la axiomática, la forma de otorgar significado a las constantes lógicas no presupone la noción de verdad, sino que se otorga asociando a cada conectiva las reglas de inferencia que determinan su uso. De esta forma, un sistema lógico queda caracterizado por su lenguaje formal y por el conjunto de reglas de inferencia propio de los sistemas de deducción natural.

A fin de dar un ejemplo de la presentación inferencial de la lógica y por razones que el lector comprenderá cuando tratemos temas posteriores, no daremos aquí la formulación original del cálculo de deducción natural, tal como fue dada por Gentzen, sino que reproduciremos una de las versiones (CN) más usadas en los textos de lógica a propósito de enseñar deducción natural en lógica proposicional.

Reglas básicas del cálculo de deducción natural (CN)

Conectiva	*Reglas de Introducción*	*Reglas de Eliminación*
$\wedge$	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ (I∧)	$\dfrac{A \wedge B}{A}$ $\dfrac{A \wedge B}{B}$ (E∧)
$\vee$	$\dfrac{A}{A \vee B}$ $\dfrac{B}{A \vee B}$ (I∨)	$A \vee B$ $\dfrac{\begin{matrix}[A]^{(*)} \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$ (E∨)
$\to$	$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}$ (I→)	$\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (E→)
$\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A}$ (I¬)	$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ (E¬)

* Los corchetes indican que la fórmula es una hipótesis (o supuesto) que deberá ser cancelada en el curso de la deducción. El nombre de cada regla está escrito entre paréntesis.

La regla de I$\wedge$ recibe comúnmente el nombre de Conjunción o Adjunción (Adj); I$\vee$, el nombre de Adición (AD) ; I $\rightarrow$, Teorema de la Deducción o Condicionalización (TD); I $\neg$, Reducción al Absurdo (*Reductio ad adburdum*) (Rab); E $\rightarrow$, *Modus Ponens*; E$\wedge$, Simplificación (SP); E$\vee$, Prueba por Casos y E $\neg\neg$, Doble Negación (DN). En la versión axiomática al estilo Hilbert, las reglas de inferencia (es decir, H-reglas), tienen la siguiente forma: X$\vdash$A, donde X es un conjunto de fórmulas del sistema y A una única fórmula. Para el caso de la regla de *Modus Ponens* de H_P, X es el conjunto formado A $\rightarrow$ B y A, y A es B. A diferencia de las reglas de inferencia al estilo Hilbert, en los sistemas de deducción natural se admite que las reglas de inferencia tengan como premisas inferencias a partir de hipótesis. Tal es lo que sucede en las reglas I $\rightarrow$, E$\vee$ e I $\neg$. Llamaremos reglas al estilo Gentzen (i.e., G-reglas) a las que tengan la siguiente forma: Q, X $\vdash$ A, donde Q representa un conjunto de inferencias (i.e., las inferencias que actúan como premisas en las reglas mencionadas), y los restantes signos representan lo mismo que en las H-reglas.

Pese a las diferencias recién apuntadas, las presentaciones de la lógica proposicional al estilo Hilbert y al estilo Gentzen son equivalentes. Demostrar este resultado no es tarea sencilla y excede el límite de este libro. Sin embargo, hay correspondencias que el lector puede observar en forma intuitiva, como por ejemplo, entre H3 y H4 en H_P y la regla de Eliminación de la Conjunción de CN, entre H6 y H7 y la Introducción de la Disyunción, entre H11 y la regla de Eliminación de la Negación, y entre el *Modus Ponens* de H_P y la Regla de Eliminación del Condicional de CN.

Lamentablemente, por razones que no podemos explicar aquí, no todas las lógicas que difieren de la lógica clásica son expresables adecuadamente en un sistema de deducción natural al estilo Gentzen (cfr. 5.3) Por ello, nosotros adoptaremos la noción de *base deductiva* para referirnos al conjunto de axiomas y/o reglas de inferencia que caracterizan a un sistema lógico determinado, no importando el estilo en que éstas sean formuladas y designaremos a este conjunto también con la letra Q.

El lector podrá encontrar ejemplos sencillos de bases deductivas en el conjunto de reglas de inferencia que conforman los sistemas deductivos de textos muy usados, tales como los de I. Copi, *Introducción a la lógica* y *Lógica simbólica* y *Lógica matemática elemental* de B. Mates, entre otros.

Resumiendo. Convenimos en llamar *sistema lógico* (S) a una estructura compuesta de los siguientes dos elementos: un lenguaje formal L (tal como se lo describió anteriormente) y una base deductiva Q que determina unívocamente el significado de las constantes lógicas y la noción de consecuencia lógica de dicho sistema. Más rigurosamente, S = <L, Q>, donde L es un lenguaje análogo al descrito antes y Q es el conjunto de reglas de inferencia específicas de S.

Hoy en día se acepta en forma unánime que el objeto de la lógica es el estudio de la noción de consecuencia lógica y, por ende, el concepto base no es ya el de verdad lógica sino el de inferencia válida. Hay fuertes razones para sostener esta posición y mostrar que es un error grave afirmar que la noción básica de la lógica es el de verdad lógica (Read, 1995). Las dos razones de carácter teórico que consideramos fundamentales son las siguientes: 1) la noción de consecuencia lógica no es definible en términos de la noción de verdad lógica, más allá del hecho ya mencionado de que toda inferencia válida preserva la verdad; por el contrario, la verdad lógica es definible en términos de la noción de consecuencia lógica, ya que toda verdad lógica es una consecuencia a partir del conjunto vacío de las hipótesis; y tal como lo mostraremos más adelante, 2) dos sistemas lógicos pueden coincidir en el conjunto de teoremas y diferir en el conjunto de reglas de inferencia (i.e., consecuencia lógica). Desde un punto de vista más pragmático, somos de la opinión de que el enfoque inferencial, muy especialmente los cálculos de deducción natural, al poner el énfasis en el proceso que va desde las premisas hasta la obtención de la conclusión, es más fértil, y de hecho lo ha sido, respecto de la construcción de modelos para las investigaciones en ciencias cognitivas y en inteligencia artificial.

Finalmente, desde una perspectiva histórica, creemos que la concepción inferencial de la lógica recoge más fielmente las ideas aristotélicas sobre el objeto de la lógica, tal como lo han sostenido Smiley (1973) y Lear (1980) y hemos defendido nosotros en un trabajo anterior (1995).

1.5 El criterio de divergencia lógica

Sobre la base de los conceptos expuestos, en esta sección trataremos de fijar, en la forma más sencilla posible, el criterio que utilizaremos para diferenciar a la lógica clásica de las restantes lógicas y a éstas entre sí. El criterio de divergencia más conocido es, como ya se afirmó anteriormente, el dado por Susan Haack. Sin embargo, la cantidad de avances en lógica producidos especialmente a partir de los años ochenta del siglo XX, han mostrado que es insuficiente e inadecuado, ya que quedan muchos sistemas lógicos actuales fuera de su alcance. No nos ocuparemos aquí de hacer una crítica a tal criterio, sino que, inspirándonos en él, trataremos de brindar uno más preciso y abarcativo.

Dados dos sistemas lógicos S1 y S2 (donde cualquiera de ellos puede ser la lógica clásica LC), se dice que:

a) S2 es una ***extensión*** (o una *expansión*) de S1, sii se cumplen las siguientes condiciones:

(i) El vocabulario de S1 está incluido propiamente en el de S2. Es decir, S2 ha ampliado su vocabulario con el agregado de nuevas constantes lógicas, manteniéndose la misma sintaxis para la formación de fórmulas de S1 y extendiendo las reglas de formación para los nuevos símbolos lógicos; y

(ii) la base deductiva de S1 está incluida propiamente en la base deductiva de S2; i.e., S2 tiene más inferencias válidas que S1 y ellas son precisamente las que involucran al nuevo voca-

bulario de S2. Estas extensiones reciben el nombre de extensiones *conservadoras,* ya que el sistema extendido S2 preserva todas las inferencias válidas de S1.

Ejemplos: la lógica de predicados (i.e.,de Primer Orden) es una extensión conservadora de la lógica proposicional, ya que se obtiene agregando, además de nuevos signos descriptivos, los signos lógicos conocidos como cuantificador universal ∀ y cuantificador existencial ∃ y las reglas de inferencia que los rigen. A su vez, la lógica de primer orden con identidad y la lógica de segundo orden son extensiones de la lógica de predicados. Asimismo, el fragmento proposicional de las lógicas modales estándares, como la lógica proposicional modal alética y deóntica, son extensiones de la lógica proposicional clásica, ya que se obtienen expandiendo el vocabulario con nuevas constantes lógicas (los operadores *necesario/posible, obligatorio/permitido* respectivamente) más las reglas inferenciales propias. Los sistemas de Robert Stalnaker o David Lewis para los enunciados condicionales y condicionales contrafácticos son también extensiones conservadoras de la lógica proposicional clásica. En general, la mayoría de las lógicas intensionales son extensiones de la lógica clásica en el sentido conservador señalado.

Un caso particular pero poco interesante de extensión de un sistema lógico, lo constituyen las llamadas extensiones *definicionales.* Éstas se caracterizan por el hecho de que, si bien el vocabulario de S1 está incluido en el vocabulario de S2, el conjunto de inferencias válidas de S1 y S2 coinciden, o sea que S2 no amplia el conjunto de las inferencias válidas del antiguo sistema. El ejemplo más sencillo de extensión definicional se encuentra en la lógica proposicional misma. En efecto, sea S1 el sistema proposicional cuyos signos lógicos primitivos sean ¬(negación) y ∧ (conjunción). Si se extiende el vocabulario de S1 con el signo → (condicional material), se obtiene el sistema S2, cuyo conjunto de teoremas, pese a ser tipográficamente distinto del de S1, será equivalente al de S1, en virtud de la equivalencia entre las fórmulas $A \rightarrow B$ y $\neg(A \wedge \neg B)$, o si se

quiere, en virtud de la definición aceptada en la lógica proposicional clásica $A \rightarrow B =_{df} \neg(A \wedge \neg B)$.

b) S2 es una ***variante*** (o *variación*) de S1, sii se cumplen las siguientes condiciones:

(i) el vocabulario de S2 puede ser (tipográficamente) igual o distinto del vocabulario de S1, pero difiere en su sintaxis o en su semántica; y
(ii) la base deductiva de S2 es igual a la base deductiva de S1.

La llamada lógica de predicados multivariada es un ejemplo de variante de la lógica de predicados estándar, porque, pese a tener el mismo vocabulario, posee distinta semántica, ya que su dominio de interpretación se subdivide en subdominios formados por distintos tipos de entidades y además, preserva el mismo conjunto de inferencias válidas. Las variantes de un sistema que alteran su vocabulario y por ende la sintaxis del mismo pero conservan la misma semántica y el mismo conjunto de inferencias válidas reciben el nombre de *variantes notacionales.* Por ejemplo, el sistema de lógica proposicional P1 de Church (1956) es una variante notacional de cualquier calculo proposicional equivalente al del *Principia Matematica,* ya que su vocabulario lógico primitivo está compuesto por la implicación material $\rightarrow$ y la constante unaria $\perp$ (*falsum*), y el conjunto de inferencias válidas (y teoremas) sigue siendo el mismo que el de la lógica proposicional clásica estándar.

c) S2 es una lógica ***divergente*** (o *desviación*) de S1, sii se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Caso 1: el vocabulario de S2 es (tipográficamente) igual al vocabulario de S1, (en cuyo caso las constantes lógicas difieren en su interpretación pero mantienen la sintaxis), o caso 2: el vocabulario de S1 difiere del vocabulario de S2; y

(ii) la base deductiva de S2 está incluida en la base deductiva de S1. En particular si S1 es la lógica clásica LC, la base deductiva de S2, cualquiera ésta sea, siempre será deductivamente más débil que la de LC.

La intuicionista y las lógicas multivaluadas de Łukasiewicz y los sistemas de lógica difusa, son lógicas divergentes de LC en el sentido del caso 1, mientras que los sistemas de lógica de la relevancia son sistemas divergentes de LC en el sentido del caso 2, para citar los casos más significativos. En general, las hoy conocidas como lógicas subestructurales, entre las que se cuentan las que serán objeto de nuestro estudio, tales como la lógica intuicionista y la de la relevancia, son lógicas divergentes de LC.

Por último, no deseamos finalizar esta introducción sin hacer tres comentarios, el primero referido a lo que debe entenderse por lógica clásica, el segundo, a lo que en la actualidad tiende a entenderse por sistema lógico y el tercero con relación al significado de las constantes lógicas.

Primero: ya anticipamos que en la literatura lógica es común llamar *lógica clásica* a todo sistema lógico equivalente al formulado en el *Principia Matematica* (PM) de Russell y Whitehead. Como caso particular, se considera sistema proposicional clásico a todo sistema equivalente al sistema proposicional de PM. De acuerdo a esta convención, todos los tipos de sistemas lógicos incluidos en la taxonomía dada, a excepción de los que sean extensiones definicionales de PM y variantes en el sentido 2, deberán ser considerados sistemas no clásicos, o más sencillamente, lógicas no clásicas. A nuestro entender, esta posición conduce a la paradójica situación de considerar a los sistemas modales de C. I. Lewis como lógicas no clásicas, pese a ser extensiones conservadoras de PM y estén destinados precisamente a dar cuenta de la noción de deducibilidad clásica. Una forma de evitar este inconveniente sería considerar lógica clásica, tal como de hecho algunos lógicos lo hacen, a todo

sistema lógico que preserve la validez de las inferencias de la lógica clásica. De esta forma, las extensiones conservadoras de LC podrían perfectamente ser consideradas como formando parte de la lógica clásica. Más rigurosamente, podríamos afirmar que para todo sistema lógico S tal que, si LC $\subseteq$ S, entonces S es un sistema lógico clásico (ampliado). Consecuentemente, de aceptarse esta posición, sólo los sistemas que en la taxonomía dada quedan incluidos como sistemas divergentes, son los que propiamente podrían ser considerados lógicas no-clásicas. Por ello, en el presente libro, nosotros hemos adoptado esta segunda acepción.

Segundo: la definición de sistema lógico dada en la sección anterior cumple con la concepción tradicional acerca de lo que se entiende por sistema lógico. En efecto, tal como lo expusimos en 1.2, los sistemas lógicos son sistemas declarativos, en el sentido de que sus signos no-lógicos o descriptivos se refieren a oraciones o proposiciones, las reglas de formación instruyen acerca de cómo obtener oraciones a partir de otras oraciones, ya sean atómicas o moleculares, y las reglas de inferencia determinan cómo se deducen determinadas oraciones a partir de otras ya dadas. En otras palabras, la relación de consecuencia lógica semántica es definida sobre el conjunto de fórmulas de un lenguaje L en tanto oraciones o proposiciones que pueden ser verdaderas o falsas. Obviamente, es condición necesaria para que un sistema pueda ser considerado un sistema lógico, que caracterice una noción de consecuencia lógica, pues, de lo contrario, no sería un sistema lógico. Sin embargo, de ello no se sigue necesariamente que la relación de consecuencia deba definirse sobre oraciones o proposiciones y que los signos descriptivos de un sistema lógico deban necesariamente referirse a oraciones o proposiciones. La aplicación a diversos dominios de discurso de sistemas de lógica clásica, en tanto sistemas declarativos, ha resultado muy exitosa. Sin embargo, la exigencia de que sus fórmulas refieran a proposiciones, en muchos casos ha acarreado problemas en la aplicación de la lógica clásica a otros dominios de discurso, como

por ejemplo el discurso normativo, ya que las normas no pueden ser ni verdaderas ni falsas y, por lo tanto, no constituyen proposiciones. Muy probablemente por influencia de las ciencias de la computación, en la investigación lógica actual este requerimiento ha sido abandonado a la hora de determinar si un sistema es o no es un sistema lógico. En efecto, hoy se sostiene (Restall, 2000) que la lógica puede aplicarse a estructuras que no constituyan oraciones, como por ejemplo, intervalos de tiempo, procesos, acciones, estructuras gramaticales u otro tipo de estructura particular, las cuales inclusive pueden ser estructuras concretas, ampliándose de esta forma la aplicación de la lógica a dominios prohibidos en la concepción tradicional.

Tercero: el lector tal vez se haya dado cuenta de que, bajo el criterio de divergencia lógica propuesto en 1.5, subyace el problema del significado que adquieren las constantes lógicas en distintos sistemas lógicos. A su vez, éste conduce al problema general del significado de las constantes lógicas. Puesto que la dimensión filosófica del mismo excede su tratamiento en este libro, sólo nos limitaremos a realizar algunos comentarios que ayuden al lector a comprender mejor esta problemática. Es sabido que en lógica se han sostenido dos posiciones claramente diferenciadas con relación a la forma de dar significado de las constantes lógicas clásicas, a saber: (i) en forma indirecta, siguiendo la línea tarskiana, dando las *condiciones de verdad* de las oraciones que contienen a cada constante, o bien, (ii) en forma directa, siguiendo la línea wittgensteniana, dando las reglas de inferencia que especifican su uso. El enfoque (i) ha sido sin lugar a dudas el más aceptado por la comunidad lógica desde los trabajos semánticos de Tarski. En él, el significado de las constantes se otorga asociando unívocamente a cada constante lógica o bien una matriz veritativo-funcional (i.e., tabla de verdad), o bien determinadas condiciones de verdad, tal como lo hemos realizado en 1.2. Este enfoque ha recibido varias críticas, entre las cuales la más contundente reside en mostrar que hay sistemas lógi-

cos, como por ejemplo, la lógica intuicionista, cuyas constantes lógicas no son definidas en términos de valores de verdad sino de prueba.

El segundo enfoque está claramente representado por los cálculos de deducción natural dados por Gentzen, tanto para la lógica clásica como para la intuicionista, en los cuales el significado de las constantes lógicas está determinado por las reglas de introducción y eliminación de cada conectiva mostradas en 1.4. La crítica fundamental a este enfoque fue realizada por Prior (1960). El eje central de su argumentación consistió en sostener que, a fin de especificar el uso de una conectiva o constante lógica, es necesario que la constante deba ya tener fijado un significado independiente, ya sea a través de tablas de verdad o mediante la especificación de sus condiciones de verdad. A fin de mostrar que el significado de las conectivas lógicas no puede darse sintácticamente, o sea por medio de reglas, Prior propone adicionar a un lenguaje lógico, en particular al lenguaje de la lógica proposicional clásica, las reglas de uso de una supuesta conectiva *tonk*, a saber:

(i) A⊢ A *tonk* B
(ii) A *tonk* B ⊢ B

de forma tal que ella permita deducir, cualquier proposición a partir de cualquier proposición, o sea: A ⊢ B. Con esto Prior cree haber mostrado que definir las conectivas lógicas por reglas permite cualquier arbitrariedad en la deducción, en particular, la indeseable afirmación de que una proposición se deduce de cualquier otra. Por lo tanto –concluye Prior– tal inferencia no es válida en los sistemas lógicos porque, previamente a la formulación de las reglas (en este caso, las de Introducción y Eliminación de la Conjunción), se tenía *in mente* la tabla de verdad de la conjunción. La refutación al argumento de Prior fue dada por Belnap (1962). En su contrargumento, Belnap hace notar, por primera vez, que las reglas

que caracterizan una conectiva se establecen dentro de un contexto previo de deducibilidad, o sea, de una noción previa de consecuencia lógica y que, por lo tanto, las únicas conectivas que se pueden introducir en un sistema son aquellas consistentes con la noción de consecuencia lógica subyacente al sistema. Hace notar también que, además de la relación de consecuencia lógica aceptada en el cálculo, debe exigirse *unicidad* para la caracterización de las conectivas, i.e., que cada una sea caracterizada por un conjunto específico de reglas de inferencia.

Por nuestra parte, reconocemos que los problemas relativos a determinar qué es una constante lógica, la elucidación de la relación entre éstas y las expresiones lógicas del lenguaje natural que pretenden representar, y el análisis de las alternativas propuestas para otorgarles significado, constituyen problemas aún abiertos en la filosofía de la lógica. Dado que de ellos nos hemos ocupado en otros trabajos (1993,1994), en este libro nos limitaremos a señalar que, sobre la base de la línea argumentativa de Belnap, hemos adoptado la siguiente definición de constante lógica: *una constante lógica es una expresión cuyo uso está regulado dentro de un sistema lógico por convenciones precisamente establecidas* (Orayen,1989). Más aún, dada esta caracterización de constante lógica, carecerá de sentido preguntarse por el significado de una constante lógica fuera de un sistema lógico.

Dado que el análisis de los sistemas lógicos no clásicos que nos hemos propuesto desarrollar en el presente libro requiere del estudio de la noción de consecuencia de la lógica clásica y de algunas nociones básicas de lógica modal, el próximo capítulo lo dedicaremos precisamente a estudiar la relación de consecuencia lógica clásica y a exponer las nociones modales indispensables.

Lecturas sugeridas

Para comenzar a profundizar los estudios sobre la lógica desde una perspectiva filosófica y lingüística, se recomienda el libro de L. T.

F. Gamut, *Introducción a la lógica* (vol. 1 de la obra de los mismos autores *Logic, Language and Meaning)*, y, aunque de nivel más elevado, el trabajo de Wilfrid Hodges, Elementary Predicate Logic, primer capítulo del *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 1, *Elements of Classical Logic*. Una completa presentación de la lógica, tanto de la versión axiomática como de la inferencial, se encuentra en el libro de David Bostock, *Intermediate Logic*. Para una presentación tradicional de la lógica y la teoría de conjuntos, se sugiere el libro de Robert Stoll, *Set Theory and Logic*. Para profundizar los aspectos históricos, se sugiere la clásica obra de W. y M. Kneale, *El desarrollo de la lógica*. Un panorama actualizado sobre la problemática acerca de lo que debe entenderse por lógica, se encuentra en la compilación de D.M. Gabbay, *What is a Logical System?* Para un análisis lógico filosófico de temas lógicos centrales y, en particular, de los sistemas de lógica divergentes, se recomiendan los conocidos libros de Susan Haack, *Lógicas desviadas* y *Filosofía de las lógicas*. Para profundizar el estudio de las nociones de *expresión lógica* y *constante lógica* y otras relacionadas, se recomienda el excelente y cuidadoso análisis de R. Orayen, Forma lógica, lógica deductiva y lenguaje ordinario incluido en su libro *Lógica, Significado y Ontología* (1989).

2
La noción de consecuencia de la lógica clásica

2.1 La caracterización sintáctica y semántica de la noción de consecuencia lógica

En el capítulo anterior hemos visto que todo sistema lógico tiene una dimensión sintáctica y otra semántica y que su noción de consecuencia queda determinada por el lenguaje y la base deductiva correspondiente. Así, caracterizar la lógica clásica conlleva necesariamente analizar su noción de consecuencia lógica. Abordaremos esta tarea profundizando algunos conceptos básicos esbozados en la Introducción.

La noción de consecuencia lógica sintáctica de la lógica clásica comúnmente es identificada con la noción de deducibilidad, representada por el signo $\vdash$ (deductor). Por su parte, la noción de consecuencia semántica se identifica directamente con la noción de consecuencia lógica representada por el signo $\models$. Ambas acepciones han dado lugar a distintos enfoques de la lógica, los cuales han tenido defensores y detractores, según sea la concepción filosófica que haya sido sostenida con respecto a la lógica.

El enfoque sintáctico se inicia a comienzos de siglo XX, con la idea de construir un lenguaje para la matemática que rescate sólo los aspectos puramente formales y prescinda totalmente del significado y de la verdad de las oraciones. Tal método permite obtener un sistema carente de interpretación (i.e., un cálculo). El concepto de sintaxis fue introducido por Carnap, quien en su ya mencionada obra, *The Logical Syntax of Language*, dio por primera vez la más clara exposición de la noción de consecuencia sintáctica desde el nivel metalingüístico, al definirla mediante la noción de deriva-

ción (o deducción). Dado un lenguaje L, una *derivación* de A_1, A_2, ... ,A_n (para n $\geqslant$ 0) es una serie (finita) de fórmulas, tal que o una de las hipótesis, o un axioma, o es directamente derivable por la aplicación de reglas de inferencia de una o varias fórmulas anteriores. Si A_n es la fórmula final de la derivación, entonces se dice que A_n es derivable de A_1, A_2, ..., A_m (i.e., $A_1, A_2, ..., A_m \vdash A_n$). Si el conjunto de hipótesis fuera vacío, entonces A_n es un teorema. Esta noción de deducción queda caracterizada en el metalenguaje por las siguientes propiedades:

$\vdash$1 $\Gamma \vdash A$, si $A \in \Gamma$ (*Reflexividad generalizada*)
$\vdash$2 $\Gamma \vdash A$, entonces $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ (*Monotonía*)
$\vdash$3 $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$, entonces $\Gamma \vdash A$ (*Corte*)

Intuitivamente, $\vdash$1 dice que si una fórmula A pertenece a un conjunto de fórmulas Γ, entonces ella se deduce de dicho conjunto. La segunda propiedad dice que si una fórmula A se deduce de un conjunto de fórmulas Γ y si a este conjunto se le agrega una nueva fórmula B (i.e., se refuerza el conjunto Γ agregando una nueva fórmula B), del conjunto Γ más la nueva fórmula B se sigue derivando A. Por último, es fácil de constatar que $\vdash$3 refleja la propiedad de transitividad de la relación de deducibilidad.

El enfoque semántico se tematiza, como ya señalamos, a partir de los trabajos de Tarski sobre las nociones de verdad y de consecuencia lógica, tal como las expone en su artículo *On the Concept of Logical Consequence* (1936). Desde esta perspectiva, la noción de consecuencia lógica semántica es formulada de la siguiente manera: $\Gamma \vDash A$ (i.e., A es una consecuencia semántica del conjunto de oraciones Γ si y sólo si toda interpretación que hace verdaderas a las oraciones de Γ hace verdadera a la oración A. Para el caso particular de la lógica proposicional, cuando toda valuación que hace verdadera a cada una de las fórmulas de Γ, también hace verdadera a A. Las propiedades de la noción de consecuencia semántica son análogas a las propiedades de la noción de consecuencia sintáctica

al punto que las propiedades $\models 1$, $\models 2$ y $\models 3$, pueden ser consideradas como las contrapartidas semánticas de las propiedades sintácticas dadas para la noción de consecuencia sintáctica o viceversa.

$\models 1$ $\Gamma \models A$, si $A \in \Gamma$ (*Reflexividad generalizada*)
$\models 2$ $\Gamma \models A$, entonces $\Gamma \cup \{B\} \models A$ (*Monotonía*)
$\models 3$ $\Gamma \models B$ y $\Gamma \cup \{B\} \models A$, entonces $\Gamma \models A$ (*Corte*)

Es sabido que ambas caracterizaciones de la noción de consecuencia lógica convergen en los resultados de consistencia y completitud para la lógica proposicional señalados en el capítulo anterior, los cuales demuestran que el conjunto de los teoremas de la lógica proposicional clásica coincide con el conjunto de las tautologías (i.e., verdades lógicas) y análogamente para la lógica de Primer Orden.

Alchourrón, en *Concepciones de la lógica* (1995), analiza la problemática de la primacía del enfoque sintáctico sobre el semántico y viceversa, mostrando las bondades y dificultades de cada uno de ellos. Nosotros no creemos necesario reproducir esa controversia ya que coincidimos con R.Wojcicki (1988) cuando afirma que la diferencia entre el enfoque sintáctico y semántico de la lógica es más bien de naturaleza filosófica que lógica. Las razones que fundamentan esta posición son, sintéticamente, las siguientes: (i) el análisis que se puede llevar a cabo en términos de verdad puede realizarse también en términos de teoremas, con la ventaja manifiesta de que, al estar despojado de las connotaciones filosóficas que suelen rodear al concepto de verdad, permite analizar la estructura formal de los sistemas lógicos de manera más transparente; (ii) la noción de verdad, tradicionalmente considerada el centro de la actividad científica, parece haber sido desplazada hacia la búsqueda de «buenas» teorías (en el sentido de teorías consistentes a las que sólo se les pide un alto grado de aceptabilidad y poder explicativo); (iii) no hay nada que impida, desde el punto de vista lógico, que las funciones de valuación sean interpretadas como funciones que asig-

nan valores no vinculados a la noción de verdad, como de hecho hoy sucede en la mayoría de las lógicas no clásicas; (iv) el concepto de inferencia válida puede definirse también desde un punto de vista pragmático, por ejemplo, en términos de aceptabilidad racional, de tal forma que la inferencia $\Gamma \vdash A$ sea considerada lógicamente válida, si –postulada la existencia de un individuo «ideal»– todo aquel individuo que acepte todas las oraciones de Γ, necesariamente deba aceptar A, a menos que desee actuar irracionalmente; y (v) no hay ninguna razón estrictamente lógica por la cual sea necesario aplicar las relaciones lógicas solamente a proposiciones, dejando de lado toda posibilidad de construir sistemas lógicos que, por ejemplo, refieran a normas o acciones o a cualquier otra entidad de la cual no se pueda predicar verdad o falsedad.

Por último, y antes de abandonar estos enfoques, necesitamos aclarar que en ambos la noción de consecuencia está presentada como una relación entre un conjunto de fórmulas Γ, el cual puede ser vacío o constar de una o más fórmulas, y una sola fórmula A, i.e., $\Gamma \vdash A$ o $\Gamma \models A$. Recuérdese que las relaciones constituyen proposiciones y que, en tanto tales, son susceptibles de ser verdaderas o falsas.

Pasaremos ahora a analizar una tercer perspectiva, conocida bajo la denominación de *consecuencia lógica abstracta*. Esta formulación tiene la virtud de capturar las propiedades tanto sintácticas como semánticas de la noción de consecuencia pero es libre de recibir distintos tipos de interpretaciones. A pesar de deberse también a Tarski, la concepción de la noción de consecuencia lógica como una relación abstracta representa, desde un punto de vista histórico, la primera ruptura con el concepto clásico de la noción semántica de consecuencia lógica. En la próxima sección, analizaremos el enfoque abstracto de Tarski, en el cual la versión sintáctica y semántica de la noción de consecuencia constituyen especificaciones de la noción abstracta; en la sección 2.3 esbozaremos los aportes de C. I. Lewis en tanto antecedente de la lógica de secuencias de G. Gentzen. Finalmente dedicaremos la sección 2.4 a la exposición

de la lógica de secuencias Gentzen para la lógica proposicional clásica, ya que esta formulación es hoy la herramienta más usada para el análisis y la comparación de sistemas lógicos.

2.2 La presentación abstracta de Tarski

La caracterización abstracta de la noción de consecuencia de Tarski es anterior a su presentación semántica y debe entenderse como formando parte de su concepción acerca de la metodología de las ciencias deductivas. En este sentido, sus investigaciones se enmarcan en la tradición iniciada por la concepción de ciencia demostrativa de Aristóteles en *Segundos Analíticos*. Esta tradición fue continuada en parte por los aportes de Bolzano en su *Wissenschaftslehre* de 1837, fundamentalmente por su definición de deducibilidad, y, hacia fines del siglo XIX, recibió un nuevo impulso con las investigaciones acerca de la fundamentación de la geometría, especialmente con la obra de M. Pasch *Vorlesungen über neuere Geometrie* de 1882, dada la influencia que esta obra tuvo en la primera edición de 1897 de los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (P. Suppes,1988). Lo peculiar de esta obra de Tarski reside en haber dado la primera versión moderna de una teoría general de las ciencias deductivas, en tanto disciplina independiente y formalizada. El mismo Tarski afirma (1930a) que el trabajo está dirigido a definir el significado y establecer las propiedades elementales de los conceptos más importantes de la metodología de las ciencias deductivas, a la cual, siguiendo a Hilbert, se acostumbra llamar metamatemática.

En efecto, en la década de 1930, principalmente en On Some Fundamental Concepts of Metamathematics (1930a, LSM, art. III) y en Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences (1930b, LSM, art. V) Tarski da la primera formulación metalingüística del concepto de consecuencia abstracta. Se diferencia del enfoque sintáctico tradicional porque esta formulación no

está determinada por un conjunto de reglas de inferencia específicas de una relación de consecuencia particular, sino que pretende capturar las propiedades comunes a cualquier clase de consecuencia, y de ahí su denominación de *abstracta.* De este modo, tanto la noción sintáctica como la semántica de consecuencia son vistas como especificaciones realizadas desde el enfoque sintáctico o semántico. En otras palabras, la intención de Tarski es presentar la estructura de una ciencia deductiva, en la cual cada sistema deductivo sea definido como un conjunto de fórmulas específicas idéntico al conjunto de sus consecuencias. O sea, si S es un sistema lógico caracterizado por un conjunto de fórmulas X, entonces S = X = Cn(X), donde Cn(X) debe entenderse como el conjunto de las consecuencias del conjunto de fórmulas X. Así, toda disciplina deductiva es concebida como un conjunto de fórmulas organizado por una operación de consecuencia. Lo peculiar de esta caracterización es que no presupone que haya reglas de inferencia. Es decir, aun cuando no se haya fijado ninguna regla de inferencia en S, puede seguir habiendo consecuencias. Esto es así porque, de acuerdo con la caracterización de consecuencia, dada una fórmula cualquiera perteneciente al conjunto X, ella misma es consecuencia de X y, por lo tanto, demostrable. Estos axiomas se cumplen para cualquier clase de consecuencia, pero ella se articula en forma diferente para cada sistema deductivo en particular. Así, la noción de consecuencia específica de cada sistema deductivo se construye como noción extendida mediante el agregado de reglas de inferencia propias.

Por razones de simplicidad expositiva, no presentaremos las distintas versiones de la noción de consecuencia que Tarski dio en las obras antes mencionadas, sino que adoptaremos la formulación conjuntística más usual en la literatura actual, a saber:

T1	$X \subseteq Cn(X)$	(*Inclusión*)
T2	$X \subseteq Y$ implica $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$	(*Monotonía*)
T3	$Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$	(*Idempotencia*)

donde X e Y son conjuntos de fórmulas de un lenguaje proposicional L cualquiera.

Lo que debemos hacer notar en primer lugar es que aquí la noción de consecuencia lógica no está representada como relación, sino, conforme a la tradición polaca, en tanto operación (Cn), en el sentido de que aplicada la operación Cn a un conjunto cualquiera de fórmulas X se obtiene un nuevo conjunto Cn(X) formado por el conjunto de todas las consecuencias de X. Dado que ambas presentaciones de la noción de consecuencia coinciden, optar por una u otra se reduce a una cuestión de mera preferencia expositiva. Aclarado esto, pasaremos a dar el significado intuitivo de los axiomas.

El primer axioma afirma lo que ya se dijo anteriormente, es decir que un conjunto X cualquiera de fórmulas de L es igual o está incluido en el conjunto de sus consecuencias. El segundo no sólo es característico de la deducción sino que, como lo veremos más adelante, satisfacerlo aunque sea parcialmente es esencial para que un sistema sea considerado deductivo. En él se afirma que, si un conjunto de fórmulas está incluido o es igual a un segundo, el conjunto formado por las consecuencias del primero está incluido o es igual al conjunto de las consecuencias del segundo. El tercero dice que el conjunto formado por las consecuencias de las consecuencias de un conjunto de fórmulas X es igual o está incluido en el conjunto de las consecuencias de X. Seguramente el lector comprenderá más cabalmente estas propiedades cuando, en la sección siguiente, las presentemos directamente aplicadas al concepto de deducción.

Debemos hacer notar que los sistemas deductivos presentados por Tarski hacen referencia a sistemas deductivos finitamente axiomatizables, eliminando aquellas clases de consecuencia determinadas por reglas de inferencia con infinitas premisas. Este requisito se introduce mediante el siguiente nuevo axioma:

T4 $\quad Cn(X) = \cup \{Cn(Y)/Y \text{ es finito y } Y \subseteq X\}$ $\quad$ (*Compacidad*)

Intuitivamente este axioma nos dice que, dado el conjunto X de las fórmulas de un cálculo, existe al menos un subconjunto finito Y (i.e., axiomas) de X, tal que el conjunto de las consecuencias de Y (i.e., de los axiomas) es igual a X. Así, toda noción de consecuencia que cumpla con T4 será considerada una consecuencia finitista o compacta. A fin de obtener la caracterización de la noción de consecuencia de la lógica clásica, hace falta introducir un axioma esencial al carácter extensional de la lógica clásica, a saber:

T5 $Cn(X) \subseteq Cn(Sb(X))$ (*Sustitución Uniforme)*

donde Sb(X) es el conjunto de todas las instancias de sustitución de las fórmulas atómicas de X por una fórmula cualquiera de L.

Esta propiedad refleja la regla conocida con el nombre de *Sustitución Uniforme,* cuya versión en lógica proposicional afirma que si en una fórmula cualquiera A se reemplaza una fórmula atómica a por otra fórmula cualquiera B en todos los lugares en los que aparece a, entonces, A resulta equivalente a $S^{\alpha}/_{B}A$.

Se puede mostrar que las propiedades de la formulación sintáctica de consecuencia cumplen con las tres propiedades fundamentales de la formulación abstracta de Tarski, demostrando que ⊢1 se corresponde con el axioma T1 (*Inclusión*), ⊢2 con T2 (*Monotonía*) y ⊢3 con T3 (*Idempotencia*) Sin embargo, por no considerarlas esenciales a los fines del presente estudio, omitiremos sus pruebas. Y viceversa, que a partir de los axiomas de la relación sintáctica, con una formulación no-finitaria de Corte, se infieren los axiomas de T1-T3 de Tarski.

Por último, se dice que la operación de consecuencia es una operación de consecuencia lógica estándar, si además de cumplir con las propiedades T1-T3 cumple también con los axiomas de compacidad (T4) y sustitución uniforme (T5). A fin de obtener la noción de consecuencia de la lógica proposicional clásica, se hace necesario agregar los axiomas propios de dicho cálculo, por ejemplo, los once

axiomas de Hilbert (H1-H11) dados en 1.3 o cualquier otro conjunto de axiomas equivalente.

En la sección siguiente trataremos de reseñar brevemente el primer intento de caracterizar la noción de consecuencia sintáctica o derivabilidad mediante la construcción de un sistema axiomático (i.e.,formulado al estilo-Hilbert), cuyo lenguaje, a diferencia de la formulación de Tarski, es un lenguaje objeto que contiene una constante lógica que reproduce en ese lenguaje objeto las propiedades metalógicas de la relación de consecuencia lógica sintáctica.

2.3 Los aportes de C. I. Lewis

Es sabido que en cualquier sistema estándar de lógica proposicional equivalente al del *Principia Matematica* son teoremas las siguientes fórmulas:

(i) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(ii) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Ellas expresan dos propiedades extrañas del condicional material, a saber, que una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición y que una proposición falsa implica cualquier otra. Por ello, son conocidas bajo el nombre de *paradojas de la implicación material.* Además, dado que el Principio del Tercero Excluido (PTE) (esto es, $A \vee \neg A$) es un teorema de la lógica clásica, por una simple deducción en la que se utilicen las reglas de Introducción y Eliminación de la Disyunción, de (i) y (ii) se deriva:

(iii) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

o sea que, dadas dos fórmulas cualesquiera, la primera implica la segunda o la segunda implica la primera. Obviamente (iii) es teorema si el signo $\rightarrow$ representa la implicación material. Si, por el

contrario, el signo $\rightarrow$ se leyera como *entailment* (o implicación lógica), tal resultado resulta falso, puesto que no es cierto que dadas dos fórmulas cualesquiera la primera implique lógicamente a la segunda o la segunda implique lógicamente a la primera. C.I. Lewis, primero en *A Survey of Symbolic Logic*, de 1919 y luego en *Symbolic Logic* escrito en 1932 con C. H. Landford, atribuye esta ambigüedad precisamente al significado que Russell atribuía a la implicación material y propone un nuevo tipo de implicación, llamada *implicación estricta* ($\Rightarrow$), la cual debe leerse como A *implica estrictamente a* B o B *se deduce lógicamente de* A. Obviamente, en este nuevo sentido (fuerte) de implicación, (ii) no resulta válida. Sin embargo, Lewis no toma en sus sistemas al signo $\Rightarrow$ como primitivo. En *Symbolic* Logic, elige como símbolo primitivo la noción modal de posibilidad ($\Diamond$), y define $A \Rightarrow B$ como $\neg\Diamond(A \wedge \neg B)$. En palabras, una inferencia es válida cuando las premisas implican estrictamente la conclusión, o sea cuando no es posible que se dé A y no se dé B. En términos semánticos, cuando no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. En presentaciones posteriores tomó el operador de necesidad $\Box$ como primitivo, en cuyos términos $A \Rightarrow B$ se define como $\Box(A \rightarrow B)$, es decir, como un condicional material necesario.

2.3.1 Los sistemas modales de C. I. Lewis

Lewis presentó las nociones modales ya mencionada bajo la forma de sistemas axiomáticos, los cuales, como ya se anticipó, no estuvieron motivados por el deseo de elucidar el concepto de necesidad lógica, sino más bien por una crítica al concepto de deducibilidad o consecuencia lógica sintáctica generada por la implicación material. Sobre la base de un sistema axiomático proposicional clásico y el operador de necesidad $\Box$, Lewis construyó cinco sistemas sintácticos S1, S2, S3, S4 y S5, todos como extensiones conservadoras de la lógica proposicional clásica PM. En particular, los tres primeros

estaban dedicados explícitamente a caracterizar el condicional estricto y posteriormente fueron fusionados por Feys bajo un sistema único, conocido hoy como sistema T. En éste y en S4 y S5 el operador de necesidad es tomado como primitivo y el de posibilidad se introduce bajo la definición: $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$. También la implicación estricta es introducida por la definición: $A \Rightarrow B =_{df} \Box(A \rightarrow B)$. A su vez, cada uno de estos sistemas está caracterizado por un conjunto de axiomas cuya intersección no es vacía, en el sentido de que tienen axiomas comunes. Así, todos los sistemas tienen como primer axioma la fórmula $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$. Agregando este único axioma a cualquier conjunto de axiomas de la lógica proposicional clásica, se obtiene el sistema modal más débil de todos, conocido bajo el nombre de *sistema* K. Daremos a continuación los axiomas característicos de K, T, S4 y S5:

Axioma de K	$\vdash \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
Axioma característico de T:	$\vdash \Box p \rightarrow p$
Axioma característico de S4:	$\vdash \Box p \rightarrow \Box\Box p$
Axioma característico de S5:	$\vdash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

El sistema T se obtiene agregando a K el axioma característico de T; S4 se obtiene agregando a T el axioma característico de S4 y, finalmente, el sistema S5 se obtiene agregando a T el axioma característico de S5. De esta forma, todos son extensiones conservadoras de K, pero S4 y S5 son extensiones conservadoras de T. Sin embargo, S5 no es una extensión de S4 porque el axioma característico de S4 no es teorema de S5, y viceversa. La base deductiva de estos sistemas se completa agregando a las reglas de inferencia del cálculo proposicional *Modus Ponens* y Sustitución la regla de inferencia modal: Si $\vdash A$ entonces $\vdash \Box A$ (Necesitación), de la cual se sigue que todas las proposiciones que constituyen teoremas de la lógica proposicional son a su vez teoremas de cualquier sistema modal. Finalmente, hoy se conviene en llamar *sistema modal normal* a todo sistema que tenga como axioma la fórmula

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$, (i.e., el axioma de K), y como reglas de inferencia Necesitación y MP. Sin embargo, el intento de C. I. Lewis de brindar una caracterización de la deducibilidad que evitara las paradojas (i) y (ii) señaladas fue en vano, ya que, como se verá más adelante, éstas se repiten en sus sistemas modales.

Los sistema de Lewis tuvieron al comienzo un interés sólo sintáctico, ya que la semántica tradicional era insuficiente para construir una interpretación para los sistemas modales. En efecto, a menos que se considere, acordando con Carnap, que el concepto de verdad necesaria y de verdad lógica son sinónimos, en la semántica tarskiana no es posible dar las condiciones de verdad de una proposición necesaria, según la definiera Leibniz como proposición verdadera en todo mundo posible. La primera interpretación semántica de los sistemas de C. I. Lewis, en particular la de su sistema S5, fue dada recién en 1947 por Carnap, con el propósito de caracterizar precisamente la noción de proposición necesaria en tanto proposición verdadera en toda *descripción de estado.* Sin embargo, es recién a partir de 1963, con los trabajos de S.A. Kripke, que se inaugura un nuevo tipo de semántica basada en la noción de mundo posible y cuya riqueza lógica posibilitó el impresionante desarrollo posterior de la lógica modal y en general de la lógica filosófica. En efecto, ella permite construir modelos no sólo para los sistemas de C. I. Lewis, sino para cualquier sistema modal y, como veremos en capítulos posteriores, también para sistemas no modales. Daremos a continuación una breve caracterización de este tipo de semántica.

2.3.2 Las semánticas de Kripke

Ya se dijo que este tipo de semántica se basa en la noción leibniziana de mundo posible. Queda a elección del lector adherir a cualquiera de los significados que desde la filosofía de la lógica se proponen para dicho concepto. A nuestro propósito sólo interesa comenzar

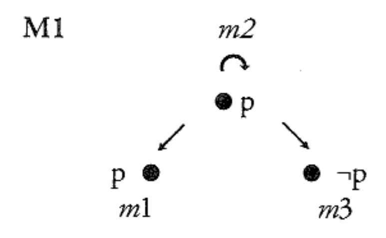
por definir lo que hoy es conocido como *modelo de Kripke*. Un modelo de Kripke es una terna <M, $\mathfrak{R}$,V>, en la que M es un conjunto de mundos posibles; m_1, m_2, m_3... son los elementos (o mundos) de M; $\mathfrak{R}$ es una relación llamada de *accesibilidad* entre mundos (i.e., entre los elementos de M) y V una función valuación que determinará, en ese modelo, el valor de verdad de cada proposición relativizado a cada mundo m_i. Puesto que $\mathfrak{R}$ es una relación entre mundos, las distintas propiedades de $\mathfrak{R}$ generan distintas relaciones entre los mundos. En otras palabras, las propiedades de $\mathfrak{R}$ determinan el conjunto de mundos que son accesibles respecto de un mundo seleccionado m_i (que no tiene por qué ser el mundo actual) y al que se deberá consultar a la hora de determinar el valor de verdad de una proposición. A continuación daremos las condiciones de verdad estipuladas por la función valuación:

1. Para toda fórmula atómica A y mundo $m \in M$, V_M (A,m) = 1 o V_M (A,m) = 0;
2. Para toda fórmula A y mundo $m \in M$, $V_M(\neg A, m) = 1$ sii V_M (A,m) = 0
3. Para toda fórmula A y B y mundo $m \in M$, $V_M(A \wedge B, m) = 1$ sii $V_M(A, m) = 1$ y $V_M(B, m) = 1$.
4. Para toda fórmula A y B y mundo $m \in M$, $V_M(A \vee B, m) = 1$ sii $V_M(A, m) = 1$ o $V_M(B, m) = 1$.
5. Para toda fórmula A y B y mundo $m \in M$, $V_M(A \rightarrow B, m) = 1$ sii $V_M(A, m) = 0$ o $V_M(B, m) = 1$.
6. Para toda fórmula A y mundo $m \in M$, $V_M(\Box A) = 1$ sii para todo m', tal que $m \neg m'$, $V_M(A, m') = 1$.
7. Para toda fórmula A y mundo $m \in M$, $V_M(\Diamond A) = 1$ sii hay al menos un mundo m', tal que $m \neg m'$ y $V_M(A, m') = 1$.

Recuérdese que, como ya dijimos, la relación $\mathfrak{R}$ de accesibilidad tiene propiedades distintas en los diferentes sistemas modales. Así, en el sistema T, la relación $\neg$ sólo tiene la propiedad de reflexividad, en S4, $\mathfrak{R}$ es reflexiva y transitiva y en S5 $\mathfrak{R}$ es reflexiva, simé-

trica y transitiva (i.e., es una relación de equivalencia). De esto se sigue que cada sistema modal define una necesidad lógica distinta, que queda determinada por el conjunto de teoremas de cada sistema modal. A continuación y con el sólo propósito de facilitar la comprensión del lector, daremos algunos ejemplos ilustrados con gráficos. En ellos, los mundos están representados por puntos y la relación de accesibilidad $\Re$ por medio de una flecha cuya dirección indica el orden de esta relación. A su vez, la letra proposicional escrita junto al mundo indica que en el modelo M dado, la fórmula p es verdadera en ese mundo, mientras que si p es falsa en el modelo, aparecerá ¬p. Por ejemplo, $m1 \rightarrow m2$, significa que el mundo *m2* es accesible desde el mundo *m1*.

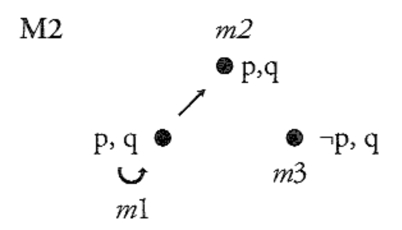
Modelo 1: Sea M1 el modelo cuyo conjunto de mundos *M* está formado por los mundos *m1*, *m2* y *m3*, o sea $M = \{m1, m2, m3\}$ y la relación de accesibilidad entre mundos $\Re = \{<m2,m2>, <m2,m3>, <m1,m2>\}$. Nótese que $\Re$ es un conjunto formado por pares ordenados, cada uno de los cuales indica el orden de la relación de accesibilidad, o sea qué mundos son accesibles desde qué otros.



Preguntémonos ahora, de acuerdo con la cláusula 6 de la definición de la función valuación, qué valor tiene la fórmula □p en cada mundo posible de M1. Puede comprobarse que □p es verdadera en *m1*, porque p es verdadera en su único mundo accesible *m2*. Formalmente porque $V_{M1}(p, m2) = 1$. Por el contrario, □p es falsa en *m2*, ya que p no es verdadera en su mundo accesible *m3*, pues en éste ¬p es verdadera. Por último, □p es (trivialmente o vacuamente)

verdadera en *m3*, ya que *m3* carece de mundos accesibles y, en esos mundos inexistentes, p también es (trivialmente) verdadera. Queda a cargo del lector determinar el valor que tienen en este modelo las fórmulas $\Diamond p$ y $\Box\neg p$, entre otras.

Modelo 2. Daremos ahora un modelo en el que resulta válido el axioma característico de K, $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$. Sea $M = \{m1, m2, m3\}$ y $\mathfrak{R} = \{<m1,m1>,<m1,m2>\}$. Su gráfico es:



Puesto que en el modelo M2, $V((p \rightarrow q), m1) = V((p \rightarrow q), m2) = 1$, entonces $V(\Box(p \rightarrow q), m1) = (\Box(p \rightarrow q), m2) = 1$. Nótese que *m3* es un mundo que no está relacionado con ningún otro y, en ese caso, análogamente a M1, toda fórmula es trivialmente necesaria, o sea, $V(\Box(p \rightarrow q), m3) = 1$. A su vez, dado que también $V(\Box q) = 1$ en *m*1, *m2* y *m3*, por cláusula 6, $V(\Box p \rightarrow \Box q) = 1$ en los tres mundos. Luego, la fórmula de K, $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$, es M2 válida.

Modelo 3: Mostraremos ahora un modelo que satisface el axioma característico de T, i.e., $\Box p \rightarrow p$. Sea $M = \{m1, m2\}$ y $\mathfrak{R} = \{<m1,m2>,<m2,m1>,<m1,m1>,<m2,m2>\}$, cuyo gráfico es el siguiente:

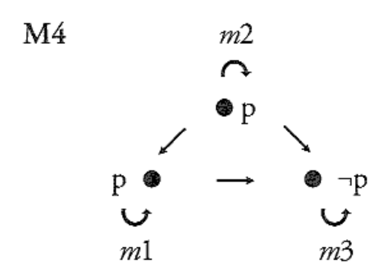
M3 p ● ←——————→ ● ¬p

m_1 ↺ m_2 ↺

Por cláusula 5, $\Box p \rightarrow p$ será verdadera si $\Box p$ es falsa o p es verdadera en cada mundo $m \in M$. Ahora bien, como $V(p, m1) = 1$ pero

$V(p,m2) = 0$, entonces $V(\Box p,m1) = 0$. A su vez, como $V(p,m2) = 0$ y $V(p,m1) = 1$, entonces $V(\Box p,m2) = 0$. Luego, $V(\Box p \rightarrow p,m1) = 1$ y $V(\Box p \rightarrow p,m2) = 1$. De lo que se sigue que $\Box p \rightarrow p$ es M3 válida. Nótese que, a diferencia de K, en el sistema T se pide que la relación de accesibilidad sea reflexiva, a fin de asegurarse que para que una proposición sea necesaria en un mundo posible, además de ser verdadera en todo mundo accesible, también deba ser verdadera en él.

Modelo 4: Daremos ahora un modelo que satisface el axioma característico de S4, $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Sea $M = \{m1,m2,m3\}$. Recuérdese además que en S4 se exige que la relación de accesibilidad sea reflexiva y transitiva, puesto que S4 es una extensión de T. De ahí que la relación de accesibilidad entre mundos $\Re = \{<m1,m1>, <m2,m2>, <m3,m3>, <m1,m2>, <m2,m3>, <m1,m3>\}$, o sea que $\Re$ es reflexiva y transitiva.



En M4, $V(p,m1) = 1$, $m1 \Re m3$ y $V(p,m3) = 0$; de ello se sigue que en M4, $V(\Box p,m1) = 0$ y, por lo tanto, en $m1$ también es verdadera $\Box p \rightarrow \Box\Box p$., i.e., en M4, $V(\Box p \rightarrow \Box\Box p, m1) = 1$. Respecto de $m2$, dado que $V(p,m2) = 1$, $m2 \Re m3$, $V(p,m3) = 0$ y que $\Box p$ es falsa, también en $m2$ resulta verdadera la fórmula $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Dado que lo mismo se verifica respecto del mundo $m3$, se infiere que la fórmula $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ es M4 válida. Nótese que si la relación de accesibilidad no fuera transitiva, es decir que no se cumpliera $m1 \Re m3$, entonces la fórmula de S4 ya no sería válida. En efecto, en ese caso, p sería falsa en $m3$, pero sería verdadera en $m1$ y $m2$. Luego en $m1$,

□p sería verdadera y □□p sería falsa porque hay un mundo accesible, *m2*, en el que □p es falsa.

Modelo 5: Veamos ahora un modelo que hace válido el axioma característico de S5, ⊢ ◊p → □◊p. Recuérdese nuevamente que, por ser S5 una extensión de T, la relación de accesibilidad debe también ser reflexiva. Sea $M = \{m1, m2\}$ y $\mathfrak{R} = \{<m1, m1>, <m2, m2>, <m1, m2>, <m2, m1>\}$, o sea que $\mathfrak{R}$ es simétrica.

M5 p ● ←——→ ● ¬p
m_1 ↻ m_2 ↻

Puesto que en *m*1 p es verdadera, entonces por cláusula 7, V(◊p,*m*1) = 1. Y, como $\mathfrak{R}$ es simétrica y, además, *m*1$\mathfrak{R}$*m2* y ◊p es verdadera en *m2*, entonces se cumple también V(□◊p,*m*1) = 1. Asimismo, como V(◊p,*m2*) = 1 y V(□◊p,*m2*) = 1, entonces la fórmula ◊p → □◊p es M5 válida. Nótese que si $\mathfrak{R}$ no fuera simétrica, entonces en *m*1, puesto que *m*1$\mathfrak{R}$*m*1, ◊p sería verdadera. Sin embargo □◊p sería falsa, porque en *m2* p es falsa y desde *m2* no es accesible ningún mundo en el que p sea verdadera, por lo cual V_{M5}(◊p,*m2*) = 0, razón por la cual no puede ser necesaria la posibilidad de p.

En la lógica modal generalizada, tal como se trabaja hoy en día la lógica modal, se parte de la noción de marco. Un marco F es un par ordenado <U,$\mathfrak{R}$>, donde U es un conjunto no vacío de objetos (no necesariamente mundos) y $\mathfrak{R}$ es una relación diádica definida sobre los elementos de U (no necesariamente la relación de accesibilidad entre mundos). A su vez, el operador de necesidad □ puede ser entendido de diversas maneras, como representando la necesidad lógica, la necesidad epistémica, la necesidad deóntica, la necesidad temporal, etc., y como es obvio que estos distintos tipos de necesidad no pueden satisfacer las mismas leyes (o teoremas), les corresponderán sistemas normales distintos y será la relación $\mathfrak{R}$ la que determinará la clase de marcos que validen las fórmulas correspondientes a cada sistema. Entre los resultados que merecen ser destacados se muestra que:

1. F es un marco de T sii $\mathfrak{R}$ es reflexiva. En particular, todo marco en el que es válida la fórmula $\Box p \rightarrow p$ es reflexivo.

2. En todo marco F en que es válida la fórmula $\Box A \rightarrow \Box\Box A$, $\mathfrak{R}$ es transitiva. Como caso particular, en S4, $\mathfrak{R}$ es reflexiva y transitiva.

3. En todo marco F en el cual es válida la fórmula $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$, $\mathfrak{R}$ es simétrica. Como caso particular, en S5, $\mathfrak{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, es una relación de equivalencia.

Bajo el supuesto de que lo expuesto haya sido suficiente para que el lector tuviera al menos una idea general sobre los sistemas modales de C. I. Lewis, no queremos abandonar este tema sin antes esbozar las sutiles pero importantes diferencias entre las presentaciones de Tarski y C. I. Lewis sobre la relación de consecuencia lógica, a saber: 1) la implicación estricta sólo puede reproducir la idea de cuándo una fórmula se deduce de otra fórmula, ya que a la izquierda del signo $\Rightarrow$ sólo puede ponerse una sola fórmula y no un conjunto como en el caso de la presentación abstracta de Tarski); 2) en la presentación de Lewis es posible encontrar fórmulas con expresiones anidadas, es decir que contengan más de una aparición de $\Rightarrow$ y sean del tipo $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$, lo cual resulta imposible en las formulaciones metalingüísticas porque en ellas, el signo $\vdash$ expresa una relación de deducibilidad o consecuencia entre el conjunto de fórmulas nombrado Γ y la fórmula nombrada por A; y 3) podría afirmarse que la formulación de Lewis de la deducibilidad en términos del operador modal necesidad y negación (o posibilidad y negación) pone más de manifiesto que la versión metalingüística de consecuencia, la idea de necesidad que parece encontrarse en la noción de consecuencia lógica. Pero como esta ventaja se observó recién a partir de las semánticas de Kripke para las lógicas modales y atañen por consiguiente a la noción semántica de consecuencia, nosotros no nos extenderemos en ella. Por nuestra parte, debemos reconocer que sólo hemos realizado esta breve incursión en la versión de Lewis de la noción de consecuencia lógica

sintáctica a través de un signo del lenguaje objeto de un sistema modal, con el propósito de brindar el antecedente más importante que tiene el enfoque de Gerhard Gentzen sobre esta noción, la cual presupone una formulación radicalmente distinta de los sistemas o cálculos deductivos, tal como pasaremos a considerar en la sección siguiente.

2.4 La presentación de Gentzen

2.4.1 Los sistemas de Deducción Natural (NC)

En 1934 se publica *Untersuchungen über das logische Schliessen* de Gentzen, cuya traducción al francés (1955) fue realizada y comentada por R. Feys y J. Ladrière. En el prefacio Feys presenta la obra lógica de Gentzen como un intento de diferenciarse de la presentación al estilo de Hilbert, la cual, desde un punto de vista intuitivo, parece artificiosa al reducir las deducciones a un mínimo conjunto de fórmulas. El enfoque de Gentzen, al introducir como elemento formalizado la expresión «tal cosa es verdadera bajo tal suposición (o hipótesis)», permite a Feys calificarlo como revelador del uso frecuente y natural del razonar a partir de suposiciones en matemática. La siguiente afirmación de Gentzen (1934, p.17) fundamenta lo dicho por Feys: «*Nous voulons édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui son réellement utilisés dans les démostrations mathématiques*». En la actualidad se coincide en aceptar la forma de presentación de Gentzen como la que más refleja los aspectos inferenciales de los sistemas lógicos, y por lo tanto considerar al cálculo de deducción natural como la presentación más apropiada para una versión inferencial de la lógica.

En general, los llamados sistemas de deducción natural, similares al dado en la Introducción, se caracterizan por los siguientes rasgos: (i) las reglas de inferencia son más bien reglas de derivación

que reglas de demostración, en el sentido de que fueron pensadas para mostrar la validez de inferencias más que la teoremicidad de determinadas fórmulas; (ii) no hay axiomas sino dos clases generales de supuestos, las premisas o supuestos iniciales y los supuestos adicionales; (iii) hay reglas que obligan a la introducción de supuestos adicionales que luego es obligatorio descargar, mientras que no es obligatorio descargar los supuestos iniciales o premisas; (iv) los teoremas se definen como deducciones a partir del conjunto vacío de los supuestos; (v) el significado de las constantes lógicas se fija por medio de las reglas que determinan su uso en el cálculo (i.e.,reglas de inferencia); y (vi) una derivación (o deducción) es una sucesión finita de fórmulas donde cada una es o un supuesto inicial, o un supuesto adicional o una consecuencia lógica de anteriores por la aplicación de una de las reglas de inferencia del cálculo. Si los supuestos han sido todos descargados, se dice que la derivación es una *demostración* o *prueba* y la fórmula resulta un *teorema*. Nada más que a título instrumental e ilustrativo de la noción de derivación (o deducción) en el cálculo de deducción natural ya expuesto, presentaremos dos ejemplos de demostración. El primero corresponde a un argumento y el segundo al teorema que dimos en 2.3 como una de las paradojas del condicional material:

1) $A \rightarrow B, \neg B$ / luego $\neg A$ (Regla del *Modus Tollens*)

1	$A \rightarrow B$	Supuesto (inicial)
2	$\neg B$	supuesto (inicial)
3	A	supuesto (absurdo)
4	B	E $\rightarrow$ 1,3
5	$B \wedge \neg B$	I $\wedge$ 2,4
6	$\neg A$	I $\neg$ 3-5

De ahora en más suprimiremos la calidad de los supuestos especificada entre paréntesis, y dejaremos al lector la tarea de identificarlos.

2) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (Paradoja Positiva)

1	A	supuesto
2	B	supuesto
3	A	Rep. 1
4	$B \rightarrow A$	I $\rightarrow$ 1, 3
5	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	I $\rightarrow$ 1-4

2.4.2 El cálculo de Secuencias (SC) (Sequenzen-Kalküle)

En el mismo libro ya mencionado, Gentzen presentó, además de los cálculos NC, una aproximación esencialmente distinta de la noción de consecuencia lógica y de sistema deductivo, bajo el nombre de *Cálculo de Secuencias (Sequenzen Kalküle* o *sequent Calculi*). Según sus propias palabras, este es un cálculo logístico al estilo Hilbert, ya que consta de un axioma y tiene por objetivo fundamental la demostración de teoremas. Expresado en el lenguaje del cálculo de secuencias (SC) mismo, su objeto consiste en determinar cuáles son las secuencias que corresponden a las fórmulas que constituyen los teoremas de un sistema axiomático. Formalmente, el cálculo de secuencias se diferencia esencialmente de los sistemas de deducción natural por las siguientes características: (i) introduce el nuevo concepto de secuencia (*Sequenz*); (ii) no parte de supuestos, sino de una secuencia básica o axioma y un conjunto de reglas de inferencia en tanto reglas estructurales o de estructura, llamadas así porque hacen referencia precisamente a la estructura de las secuencias y en ellas no aparecen signos lógicos; (iii) introduce un nuevo signo en el lenguaje objeto para denotar una determinada relación entre secuentes y para el cual, por no disponer del signo original utilizado por Gentzen y simultáneamente conservar su sentido de izquierda a derecha, nosotros hemos elegido el signo del deductor invertido, $\dashv$; y (iv) el signo $\dashv$ permite reflejar en su propio lenguaje objeto la noción de conse-

cuencia lógica, en el sentido de que es posible ver a una derivación en él como una descripción de cómo es una derivación en un cálculo de deducción natural.

Pasaremos ahora a profundizar las nociones más importantes de este tipo de cálculo, a saber: 1) el concepto de secuencia; 2) el significado del signo $\dashv$ y 3) la estructura y significado de las reglas.

1. Ya se dijo que este tipo de cálculo introduce el concepto de secuencia. Una secuencia es una expresión de la forma:

$$\Gamma \dashv \Omega$$

donde Γ, Ω son conjuntos de fórmulas cualesquiera (para el caso que nos ocupa, son fórmulas del lenguaje de la lógica proposicional clásica) y el signo $\dashv$ es un signo (no lógico) del lenguaje objeto, que permite construir las fórmulas del cálculo de Secuencias, si se prefiere, las s-fórmulas. Estos conjuntos están formados por fórmulas $A_1, \ldots, A_m; B_1, \ldots, B_n$, que son también fórmulas del lenguaje objeto. Las s-fórmulas no contienen signos lógicos; estos últimos están dentro de las fórmulas $A_1, \ldots, A_m; B_1, \ldots, B_n$. De esta forma una secuencia puede formularse de la siguiente manera alternativa:

$$A_1, \ldots, A_m \dashv B_1, \ldots, B_n$$

Las fórmulas a izquierda del $\dashv$ reciben el nombre de *antecedente* (o *prosecuente*) y las fórmulas a derecha del $\dashv$ el nombre de *consecuente* (o *postsecuente*), y para hacer referencia a cualquiera de ellos en este trabajo usaremos el término *secuente*. Las fórmulas que componen el prosecuente y el postsecuente no se relacionan por ningún signo lógico; éstos están dentro de las fórmulas $A_1, \ldots, A_m; B_1, \ldots, B_n$. Ningún secuente contiene dentro el signo $\dashv$ y ambos (i.e., prosecuente y/o postsecuente) pueden ser conjuntos vacíos ($\emptyset$).

2. Respecto del significado del signo ⊣, Gentzen afirma que la secuencia $A_1,...,A_m \dashv B_1,...,B_n$, para n, m ⩾ 1, tiene desde un punto de vista intuitivo el mismo significado que la fórmula:

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_m) \rightarrow (B_1 \vee ... \vee B_n)$$

lo cual lleva a realizar, prima facie, una analogía significativa entre los signos ⊣ y →. Sin embargo, es necesario hacer notar que, mientras el signo → se usa para relacionar oraciones o fórmulas, el signo ⊣ relaciona conjuntos de fórmulas. Se han propuesto distintas lecturas del signo ⊣. Algunos entienden directamente a las secuencias como inferencias y proponen leerlo como «se sigue»; otros, como Kneale y Kneale (1972) y C. Alchourrón (1994), inspirándose en el significado de *logical involution* de Carnap (1947), proponen traducirlo como «desenvolvimiento» o «desarrollo», con el fin de indicar que el postsecuente «desarrolla» lo contenido en el prosecuente. Pero, como el signo ⊣ posee propiedades similares al deductor clásico ⊢, en la literatura actual a menudo se los identifica y se usa el mismo signo para ambas nociones.

3. Ya se mencionó que los cálculos de deducción natural introdujeron, respecto de los sistemas al estilo Hilbert, una nueva forma de deducción, o sea, la deducción a partir de supuestos mediante la utilización solamente de reglas de inferencia para los distintos operadores lógicos. También se dijo antes que en los cálculos NC, los signos lógicos adquieren su significado por medio de reglas específicas de introducción (I-reglas) o de eliminación (E-reglas). En particular, las reglas de eliminación pueden verse como «inferidas» de las de introducción, aun cuando ellas permitan obtener en el sistema nuevas inferencias. Además, se pretende que entre ambos tipos de reglas haya cierta simetría, tal como se da paradigmáticamente en el caso de las reglas de introducción y eliminación de la conjunción, ya que si se tienen dos fórmulas A y B como premisas, se puede inferir la conclusión $A \wedge B$; y viceversa, si se tiene la fór-

mula $A \wedge B$ como premisa, se puede inferir tanto A como B. Pero tal simetría no se da en la misma forma respecto de las restantes reglas, porque, de darse esta simetría, se obtendrían consecuencias no deseadas. En efecto, si se pidiera de las reglas para la disyunción una simetría similar a la de la conjunción, la regla de E$\vee$ tendría la siguiente forma:

$$\frac{A \vee B}{A \quad B}$$

lo cual no es posible porque la noción clásica de deducción no permite dos fórmulas como conclusión. Esto hace que en los cálculos NC presentados por Gentzen, las reglas de introducción y eliminación de los signos lógicos tengan dos formas claramente diferenciables de reglas: las que tienen fórmulas en las premisas y en la conclusión, como las reglas I $\wedge$, E $\wedge$, I $\vee$ o E $\rightarrow$; o bien las que tienen una (o más) deducciones previas (o derivaciones previas) como premisas y una fórmula en la conclusión, como las reglas I $\rightarrow$, I $\neg$ o E $\vee$. Estas últimas se caracterizan también por depender de las reglas que intervienen en las deducciones previas y que son las que posibilitan la deducción posterior en la que ellas intervienen. Entre estas reglas, la regla de I $\rightarrow$ ocupa un lugar crucial, pues es la traducción a los sistemas de deducción natural del Metateorema de la Deducción (TD) de los sistemas al estilo Hilbert y es por ello que generalmente es tomada como representativa de este tipo de reglas. Recuérdese que, en forma intuitiva, esta regla dice que cada vez que hay una derivación de una fórmula cualquiera B a partir de un conjunto de enunciados Γ y una hipótesis A, o sea $\Gamma, A \vdash B$, se puede obtener una derivación de $A \rightarrow B$ a partir de Γ solamente. La premisa de I $\rightarrow$ es a su vez una derivación (i.e., derivación previa), que se ha construido con otras reglas de inferencia y su conclusión es una fórmula obtenida por una aplicación de I $\rightarrow$. Es en este sentido que puede decirse que estas reglas no hablan acerca de cómo extraer una fórmula a partir de otras fórmulas, sino que

hablan sobre deducciones y de cómo construir, a partir de las derivaciones tomadas como premisas, otra deducción de un paso más que constituirá la conclusión. Más aún, ellas nos dicen cómo, a partir de la noción de consecuencia particular determinada por las reglas involucradas en la deducción previa, se puede construir una noción de consecuencia más rica, es decir, la compuesta por una regla de inferencia más.

Gentzen presenta en su cálculo de secuencias SC dos tipos de reglas, a saber: las reglas estructurales y las reglas operatorias. Las primeras tienen por objeto caracterizar la noción de consecuencia, o en su terminología, de desarrollo representada por el signo $\dashv$ y las reglas operatorias, las cuales reemplazan en SC a las reglas de introducción y eliminación de las conectivas propias de los sistemas de deducción natural. Tal como son formuladas por Gentzen en SC, tanto las reglas estructurales como las operatorias tienen un esquema similar: aceptada que la secuencia $\Gamma \dashv \Omega$ refleja en el lenguaje objeto de SC la noción de inferencia, ellas tienen inferencias como premisas y como conclusión. Gentzen las llama *figuras de deducción* (según el caso, estructurales u operatorias), en las que las premisas son las fórmulas superiores y la conclusión las fórmulas inferiores. Sin embargo, existen al menos dos diferencias fundamentales entre las reglas de los NC-cálculos y las reglas de los SC-cálculos, a saber: (i) pese a que los esquemas operatorios se refieren a cada signo lógico, no hay reglas de eliminación; en su lugar aparecen reglas de introducción en el prosecuente (y las reglas de introducción de NC son ahora las de introducción en el postsecuente); (ii) las reglas estructurales, en tanto que permiten la permutación, repetición y agregado de fórmulas en el prosecuente y en el postsecuente, generalizan propiedades de la noción de deducción a cualquier tipo de deducción representada en una secuencia, prescindiendo totalmente de los signos lógicos que ocurren en las fórmulas que componen los secuentes; y iii) a diferencia de NC, las reglas de SC permiten más de una fórmula en el postsecuente. Además, análogamente a como las reglas operatorias fijan

el significado de los signos lógicos, las reglas estructurales fijan el significado del signo $\dashv$, asignándole propiedades similares al deductor $\vdash$.

Las formulaciones de Gentzen y de C. I. Lewis tienen en común el hecho de que ambas introducen la noción de consecuencia en el lenguaje objeto mediante los signos $\dashv$ y $\Rightarrow$ respectivamente. Sin embargo, hay diferencias que merecen destacarse, y entre ellas las más importantes son: (i) la presentación de Gentzen no es modal; en otras palabras, las secuencias no son fórmulas de un lenguaje con operadores modales; (ii) las secuencias contemplan el caso de «deducciones» con pluralidad de premisas, ya que permiten en el prosecuente una pluralidad de fórmulas, mientras que tal situación no se da en los sistemas de Lewis, en los cuales el antecedente de una implicación estricta es siempre una sola fórmula; y (iii) en los sistemas de Lewis se permiten, similarmente al condicional material, implicaciones estrictas «anidadas» (i.e., fórmulas implicativas cuyas subfórmulas son también implicativas), mientras que en la lógica de secuencias, por la propia definición de secuencia, el signo $\dashv$ no debe aparecer en ningún secuente.

Pasaremos ahora a explicar el cálculo de secuencias SC para la lógica clásica. Ya dijimos que una secuencia es una expresión de la forma $A_1, ..., A_m \dashv B_1, ..., B_n$ (o $\Gamma \dashv \Omega$). Recuérdese que $A_1,...,A_m$, $B_1, ..., B_n$ son fórmulas cualesquiera y que Γ y Ω son conjuntos cualesquiera de fórmulas. Los conjuntos de fórmulas que constituyen el antecedente (o prosecuente) como las que forman el consecuente (o postsecuente) pueden ser conjuntos vacíos, es decir puede tratarse de una secuencia nula, representada por el signo $\emptyset$. Si el antecedente de una secuencia es $\emptyset$, es decir $\emptyset \dashv \Omega$, o simplemente $\dashv \Omega$, la secuencia se reduce simplemente al postsecuente, es decir, a la fórmula $B_1 \vee ... \vee B_n$. Así, decir $\dashv \Omega$ es lo mismo que decir que Ω es verdadera. Si, por el contrario, el postsecuente es $\emptyset$, es decir $\Gamma \dashv \emptyset$, la secuencia tiene el mismo significado que decir que el conjunto Γ es falso o que $(A_1 \wedge ... \wedge A_m) \rightarrow \emptyset$. Luego, afirmar la secuencia $A_1 \wedge ... \wedge A_m \dashv B_1 \vee ... \vee B_n$, equivale a afirmar que alguno de los A es

falso o que alguno de los B es verdadero. En otras palabras, para decidir cuándo una expresión de la forma $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \dashv B_1 \vee \ldots \vee B_n$ es verdadera, el signo $\dashv$ se comporta como la implicación $\rightarrow$, y exige que, si todos los elementos del prosecuente son verdaderos, entonces al menos uno de los elementos del postsecuente lo sea (i.e., es imposible que todas las fórmulas del prosecuente sean verdaderas y todas las del postsecuente sean falsas).

Por tratarse de una formulación logística, SC cuenta con axiomas. Así, son axiomas esquemas (o secuencias iniciales) de SC todas las secuencias de la forma:

$$\Gamma \dashv \Gamma$$

donde Γ es una secuencia (o s-fórmula) formada por conjuntos de fórmulas cualesquiera y en las que no importa el orden de las fórmulas que contienen. A ellas se agregan los siguientes dos grupos de reglas:

I. Reglas estructurales para SC

	A izquierda (o en el prosecuente o antecedente)	*A derecha (o en el postsecuente o consecuente)*
Atenuación	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega}{A, \Gamma \dashv \Omega}$ (A⊣)	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega}{\Gamma \dashv \Omega, A}$ (⊣A)
Contracción	$\dfrac{A, A, \Gamma \dashv \Omega}{A, \Gamma \dashv \Omega}$ (C⊣)	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega\ A, A}{\Gamma \dashv}$ (⊣C)
Permutación	$\dfrac{\Gamma, A, B, \phi \dashv \Omega}{\Gamma, B, A, \phi \dashv \Omega}$ (P⊣)	$\dfrac{\Gamma \dashv \phi, A, B, \Omega}{\Gamma \dashv \phi, A, B, \Omega}$ (⊣P)
Eliminación o Corte $\dfrac{\Gamma \dashv \phi, A \quad A, \Omega \dashv \psi}{\Gamma, \Omega \dashv \phi, \psi}$		

(II) Reglas operatorias para SC

	En el prosecuente (*) *(o antecedente)*	*En el postsecuente (**)* *(o consecuente)*
$\wedge$	$\dfrac{A, \Gamma \dashv \Omega}{A \wedge B, \Gamma \dashv \Omega}$ $\dfrac{B, \Gamma \dashv \Omega}{A \wedge B, \Gamma \dashv \Omega}$ $(\wedge\dashv)$	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega, A \qquad \Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega, A \wedge B}$ $(\dashv\wedge)$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \dashv \Omega \qquad B, \Gamma \dashv \Omega}{A \vee B, \Gamma \dashv \Omega}$ $(\wedge\dashv)$	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega, A}{\Gamma \dashv \Omega, A \vee B}$ $\dfrac{\Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega, A \vee B}$ $(\dashv\wedge)$
$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega, A \qquad B, \psi \dashv \phi}{A \rightarrow B, \Gamma, \psi \dashv \Omega\phi}$ $(\rightarrow\dashv)$	$\dfrac{A\Gamma \dashv \Omega, B}{\Gamma \dashv \Omega, A \rightarrow B}$ $(\dashv\rightarrow)$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega, A}{\neg A, \Gamma \dashv \Omega}$ $(\neg\dashv)$	$\dfrac{A\Gamma \dashv \Omega}{\Gamma \dashv \Omega, \neg A}$ $(\dashv\neg)$

(*) Las reglas de Introducción en el prosecuente se corresponden con las reglas de Eliminación en los cálculos NC.
(**) Las reglas de Introducción en el postsecuente se corresponden con las reglas de Introducción en los cálculos NC.

Tal como puede observarse, las reglas estructurales no contienen signos lógicos. Estos aparecen en las fórmulas A y B o en las que conforman los elementos de los conjuntos de fórmulas Γ, Ω y ϕ. En esto reside precisamente el carácter abstracto y estructural de estas reglas.

2.5 La noción de consecuencia de la lógica clásica

Cada una de las reglas estructurales representa una característica esencial de la deducibilidad clásica. La primera, es decir Atenuación, permite agregar una nueva fórmula tanto al antecedente como al consecuente, en correspondencia con la propiedad de Monotonía de la formulación de Tarski; Contracción y Permu-

tación permiten eliminar en una deducción una fórmula repetida o intercambiar el orden de las premisas. Estas propiedades, por lo obvias, generalmente no se explicitan y en el lenguaje objeto de la lógica proposicional están reflejadas en las propiedades de idempotencia de la conjunción ($\vdash p \wedge p \leftrightarrow p$) y conmutatividad de la conjunción ($\vdash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$). Por su parte, el axioma T1 de Tarski parece estar directamente relacionado con la propiedad que expresa la secuencia inicial o axioma $\Gamma \dashv \Gamma$. Sin embargo, ella es expresivamente más débil que T1, ya que constituye el caso particular de la reflexividad aplicada a secuencias. Por último, la regla de eliminación o Corte se corresponde con el axioma T3 de Tarski, que ya dijimos expresaba la propiedad de transitividad de la relación de deducibilidad. Ésta tiene, además, la peculiaridad de validar el *Modus Ponens* como regla de inferencia clásica, en el sentido de que puede obtenerse a partir de Corte y verse como un caso de ésta, tal como lo mostramos a continuación.

Dada la siguiente versión simplificada (o sea, sin las letras griegas que representan las secuencias en el postsecuente) de Corte:

$$\frac{\Gamma \dashv A \quad A, \Omega \dashv B}{\Gamma, \Omega \dashv B}$$

no es difícil comprobar que, para $\Gamma = \Omega$, la siguiente secuencia es un caso de Corte:

$$\frac{\Gamma \dashv A \quad A, \Gamma \dashv B}{\Gamma \dashv B}$$

y que, si Γ es una secuencia nula (o sea, $\Gamma = \emptyset$), entonces la secuencia:

$$\frac{\dashv A \quad A \dashv B}{\dashv B}$$

expresa la regla de inferencia *Modus Ponens* de un sistema logístico, la cual, como ya sabemos, preserva la teoremicidad. En otras palabras, si la fórmula A es un teorema y B se deduce de A, entonces B también es un teorema. El axioma T4 (compacidad) de Tarski se cumple porque la versión secuencial de consecuencia es compacta y finitista desde el comienzo, ya que por construcción, las secuencias son series finitas de fórmulas. Aunque imposible de demostrar aquí, es evidente que las reglas de SC validan la regla de Sustitución expresada en el axioma T5. Por último, deseamos destacar que la noción secuencial de consecuencia de Gentzen puede verse como un caso particular finitista de la versión moderna al estilo Tarski y, por ello mismo, no alcanza el grado de abstracción de la versión tarskiana. La comparación puede realizarse también en sentido inverso y ver a la versión de Tarski como una generalización de la de Gentzen.

El segundo grupo de reglas ya no hacen referencia a propiedades generales de la deducción sino que específicamente expresan el comportamiento de las conectivas proposicionales o signos lógicos, en términos de operaciones, y de ahí su nombre de *operacionales.* Debe tenerse en cuenta que, en las reglas operacionales, las reglas de introducción de las conectivas en los cálculos de deducción natural están representadas por los esquemas operatorios de introducción en el postsecuente y que, a diferencia de los sistemas de deducción natural, no hay reglas de eliminación. En su lugar aparecen las reglas de introducción en el antecedente o prosecuente, ya que, introducirlas en el antecedente significa lo mismo que eliminarlas del consecuente, o sea de la conclusión. Así, el esquema operatorio ($\wedge \dashv$) corresponde a la regla de Eliminación de la Conjunción, el esquema ($\vee \dashv$) corresponde a la Eliminación de la Disyunción, el esquema ($\rightarrow \dashv$) corresponde a la Eliminación del Condicional y el esquema ($\neg \dashv$)a la Eliminación de la negación.

Lo realmente interesante radica en mostrar cómo es posible obtener los esquemas operatorios a partir de secuencias iniciales o

axiomas. Tomando los conjuntos Γ, Ω y ϕ como secuencias vacías, es posible dar ejemplos que resulten más sencillos de comprender.

3) Introducción de la Disyunción en el Postsecuente:

$A \dashv A$	Ax
$A \dashv A,B$	$\dashv A$*
$A \dashv A \vee B$	$\dashv \vee$

* En general $\dashv A$ es omitida.

4) Introducción de la Conjunción en el postsecuente:

$A \dashv A$	$B \dashv B$	Ax.
$A,B \dashv A$	$A, B \dashv B$	$A \dashv$
$A,B \dashv A \wedge B$		$\dashv \wedge$

5) Introducción del $\rightarrow$ en el prosecuente (*Modus Ponens*):

$A \dashv A \quad B \dashv B$	Ax.
$A \rightarrow B, A \dashv B$	$\rightarrow \dashv$

En el ejemplo 3) hemos intentado mostrar que la incorporación de la nueva fórmula B en la conclusión de la regla de Adición a partir de la premisa A, está autorizada porque, en lógica clásica, la regla estructural $\dashv A$, permite adicionar una fórmula al postsecuente. El ejemplo 4) corresponde al esquema operatorio $\dashv \wedge$ y que se corresponde con la regla de Introducción de la Conjunción de NC. Finalmente, el ejemplo 5) muestra cómo el *Modus Ponens* (o Eliminación del Condicional) se obtiene en forma directa a partir de secuencias iniciales.

Veamos también la prueba de otras inferencias y leyes clásicas:

6) Eliminación de la Doble Negación:

$A \dashv A$	Ax
$\dashv A, \neg A$	$\dashv \neg$
$\neg\neg A \dashv A$	$\neg \dashv$

Asimismo, para determinar qué secuencias corresponden a teoremas del un sistema al estilo Hilbert, se muestra que toda secuencia compuesta por una fórmula A cuyo prosecuente sea vacío, o sea $\dashv A$, es un teorema. El teorema correspondiente al caso particular del esquema estructural fundamental $A \dashv A$, se obtiene directamente aplicando a él el esquema operatorio $\dashv \rightarrow$, es decir $\dashv A \rightarrow A$, usualmente conocido como Principio de Identidad. Dado que a menudo nos referiremos a ellos, daremos también como ejemplos las pruebas del axioma H1, $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (ejemplo 7) y del Principio del Tercero Excluido (ejemplo 8).

7) Paradoja Positiva:

$A \dashv A$	Ax
$B, A \dashv A$	$A \dashv$
$A \dashv (B \rightarrow A)$	$\dashv \rightarrow$
$\dashv A \rightarrow (B \rightarrow A)$	$\dashv \rightarrow$

8) Principio del Tercero Excluido:

$A \dashv A$	Ax
$\dashv A, \neg A$	$\dashv \neg$
$\dashv A \vee \neg A$	$\dashv \vee$

Por último, queremos destacar que la regla estructural de Atenuación en el Prosecuente es la que permite la introducir hipótesis en una derivación, como se verá en la prueba de la siguiente inferencia: $A \wedge B, \neg(A \wedge C) \dashv \neg C$:

9)

$$\begin{array}{cl}
A \dashv A \qquad\qquad C \dashv C & \\
\hline
A, B, C \dashv A \quad A, B, C \dashv C & A\dashv \\
\hline
A, B, C \dashv A \wedge C & \dashv\wedge \\
\hline
A \wedge B, C \dashv A \wedge C & \wedge\dashv \\
\hline
A \wedge B, \neg(A \wedge C), C \dashv & \neg\dashv \\
\hline
A \wedge B, \neg(A \wedge C) \dashv \neg C & \dashv\neg
\end{array}$$

En resumen, dado que se prueba que las reglas de inferencia del cálculo NC son demostradas en SC, y como éste caracteriza la lógica proposicional clásica, toda inferencia cuya validez se pruebe a partir de las reglas de NC, son también reglas que pertenecen a la lógica clásica.

Siguiendo a J. Wójcicki, (1984, 8.1.), un sistema lógico S es una lógica *estructuralmente completa* si y sólo si toda regla de inferencia que preserve la verdad, i.e. que preserve Cn(∅) es una regla de S. Más específicamente, dado que en SC un teorema consiste en una secuencia con prosecuente vacío, o sea, $\dashv \Gamma$, o, en otras palabras, que una fórmula A es teorema cuando es una consecuencia a partir del conjunto vacío de los supuestos, o sea, $\vdash$A, podemos expresar más rigurosamente este concepto afirmando que un sistema lógico es *estructuralmente completo* si y solo si contiene al conjunto de todas las consecuencias del conjunto vacío Cn(∅). En particular, el conjunto de las inferencias o consecuencias del conjunto vacío de la lógica clásica, es decir Cn (LC) está incluido impropiamente en Cn(∅), o sea: Cn(LC) $\subseteq$ Cn(∅). Y, puesto que en lógica clásica el conjunto de las inferencias válidas es igual al conjunto de los teoremas o Cn(∅), entonces, toda fórmula que es una consecuencia del conjunto ∅ es una regla de LC. Y, como además, no hay ninguna consecuencia del conjunto ∅ que no sea regla de LC, se sigue entonces que LC es estructuralmente completa.

Desde la semántica ya hemos visto que un teorema es una proposición universalmente válida y que, para el caso de la lógica

proposicional, este concepto coincide con el de tautología. Por ello, cuando se dice, desde la sintaxis, que una regla de inferencia preserva la propiedad Cn(∅), lo que semánticamente se quiere decir es que ellas preservan la tautologicidad, en el sentido de que si las premisas son tautologías, la conclusión de la regla también lo será. De ahí que el conjunto de todas consecuencias del conjunto vacío, esto es Cn(∅), bajo la interpretación estándar de Tarski, pueda leerse como el conjunto de todas las tautologías. En términos de la lógica de secuencias, este resultado es equivalente a afirmar que LC satisface todas las reglas estructurales de SC.

Contrariamente, tal como se mostrará en los siguientes capítulos, la lógica intuicionista, la lógica de la relevancia y la lógica multivaluada de Łukasiewicz, entre otras, no son estructuralmente completas y se las incluye en el grupo de las lógicas conocidas hoy como lógicas *subestructurales.* Estas son llamadas así porque precisamente se caracterizan por no satisfacer alguna de las reglas estructurales de Gentzen. En la terminología de Wójcicki, son lógicas estructuralmente incompletas.

Finalmente, deseamos hacer la siguiente observación en relación con el carácter deductivo de toda lógica. Para que una lógica sea deductiva, su noción de consecuencia debe satisfacer o bien la propiedad de Monotonía en la caracterización tarskiana, o bien con Atenuación de la versión de Gentzen. Es sencillo constatar que éstas quedan reflejadas en el lenguaje objeto de LC por la regla conocida con el nombre de *Refuerzo del Antecedente* (RA), a saber $A \rightarrow B \vdash (A \wedge C) \rightarrow B$. De ahí que las hoy llamadas lógicas *no-monótonas,* comunes en Inteligencia Artificial y en los formalismos sobre enunciados condicionales, carezcan de esta regla y no constituyan lógicas preservativas de la verdad. Tener presentes las propiedades de la lógica clásica expuestas ayudará a determinar con más precisión la noción de consecuencia de los sistemas lógicos que analizaremos en los próximos capítulos y el grado de divergencia de ellos respecto de la lógica clásica.

Lecturas sugeridas

Para profundizar en el enfoque semántico y sintáctico de la noción de consecuencia lógica se recomienda el trabajo de Carlos Alchourrón: Concepciones de la lógica, publicado en el tomo 7, titulado, *Lógica* de la *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía (EIAF)*, (1995). Una versión más completa de la noción de consecuencia abstracta se encuentra en La noción de consecuencia lógica abstracta, de G. Palau (publicación *on line*). Una introducción al concepto semántico de consecuencia lógica, también en español, se encuentra en *Forma y Modalidad* de Mario Gómez Torrente. Para una sintética y rigurosa de las distintas formulaciones de la noción de consecuencia lógica, se recomienda el trabajo de B. G. Sundholm, Varieties of Consequence, en *A Companion to Philosophical Logic* (2002). Los trabajos de Tarski se encuentran publicados en *Logic, Semantics, Metamathematics* (1983). Una excelente discusión de la concepción semántica de verdad se encuentra en *The Concept of Logical Consequence*, de John Etchemendy (1990). Una exposición clara, breve y sistemática de la semántica de la lógica modal en español se encuentra en el tomo 2 (en preparación)del libro ya mencionado en la bibliografía de la introducción, *Lógica, lenguaje y significado* de L. T. F. Gamut. Para un conocimiento más profundo de los sistemas modales y su semántica se recomienda el libro de G. E. Hughes y M. J. Creswell, *A New Introduction to Modal Logic* (1996) (Hay una traducción al español de la primera versión de 1969 en Tecnos, Madrid). Un tratamiento formal tanto de los sistemas deductivos al estilo Frege-Hilbert, como de los sistemas de deducción natural y del cálculo de secuencias de Gentzen, se encuentra en el excelente trabajo de Göran Sundholm, Systems of Deduction, en *Handbook of Philosophical Logic*, vol. I, *Elements of Classical Logic*, (1999). La obra de G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, cuenta con ricas y útiles notas de Robert Feys y Jean Ladière. Otra presentación de estos cálculos, más sencilla que la recomendada antes pero algo modificada en relación a la presentación estándar, se encuentra en el texto de David Bostok, *Intermediate Logic* (1997).

3
La lógica intuicionista y la crítica al razonamiento matemático

3.1 La crítica a la matemática clásica: el principio del tercero excluido

Es sabido que el intuicionismo, en tanto filosofía de la matemática, se inspira en las tesis kantianas acerca del carácter *a priori* de los principios de la aritmética y de su conocimiento por medio de la intuición. A fines del siglo XX fue anticipado por los matemáticos L. Kronecker y H. Poincaré, el primero en sus fuertes argumentaciones contra las ideas de Cantor sobre el infinito matemático y el segundo en su concepción sobre el papel de la lógica y la intuición en la matemática. Sin embargo, como corriente filosófica acerca de la matemática se sistematiza recién a comienzos del siglo XX, cuando se instala en el seno de la academia matemática alemana el debate sobre la fundamentación de la matemática, en torno a la figura del ya reconocido profesor de la Universidad de Gottinga, David Hilbert. En efecto, en el Segundo Congreso Internacional de matemática realizado en París en 1900, Hilbert presenta una serie de 23 problemas no resueltos que, según su pensar, constituirían el gran desafío para los matemáticos del siglo XX. Esta lista de problemas es conocida hoy como *Programa de Hilbert.* El primero planteaba el problema de la estructura del continuo formado por los números reales y el segundo, basado en la exigencia de rigor para las pruebas matemáticas ya instalada a fines del siglo anterior, preguntaba por la consistencia de los axiomas de la aritmética. Las posiciones frente a estos y a otros problemas que se plantearon en el programa hilbertiano, dividieron a los matemáticos en las corrientes filosóficas, denominadas con los nombres de

logicismo, formalismo e *intuicionismo.* El primero estaba fundamentalmente representado por Bertrand Russell, el formalismo se desarrolló bajo la dirección del mismo Hilbert y el tercero se constituyó alrededor de la figura de L. E. J. Brouwer. Ya en su tesis doctoral de 1907, este último sometió a fuerte crítica las tesis centrales respecto de la naturaleza, métodos y fundamentación de la matemática defendidas por el logicismo y el formalismo, a saber: (Beth, 1959) (i) la axiomatización de la matemática sobre la base de conceptos lógicos; (ii) la teoría de conjuntos de Cantor, en especial su concepción del infinito actual y su tratamiento de los conjuntos infinitos; (iii) la lógica simbólica tal como la presentaba Russell y (iv) las ideas de Hilbert respecto de la metamatemática. A partir de estas primeras críticas, Brouwer elabora las tesis fundamentales que caracterizan al intuicionismo como posición filosófica frente a la naturaleza y la fundamentación del conocimiento matemático y que finalmente culminaron en el rechazo de la lógica clásica.

A continuación, esbozaremos solamente las cuatro ideas que estimamos fundamentales, con el solo propósito de enmarcar nuestro análisis de la lógica intuicionista.

1) La matemática no es una ciencia puramente formal, sino que tiene un contenido específico, el cual es captado por el sujeto pensante por medio de la intuición independientemente de la experiencia. Por ello, no es posible fundamentar la matemática sin prestar atención a la estructura del pensamiento matemático en tanto actividad mental, sin el riesgo de quedarse en los aspectos externos, tal como según Brouwer le sucedió a Frege, debido a su antipsicologismo. Por el contrario, la matemática, en tanto ciencia conceptual, corresponde a la parte exacta del pensamiento, de manera que investigar la matemática es precisamente indagar acerca de los procesos mentales que la generan.

2) En particular, para la fundamentación de la aritmética no es correcto partir de conjuntos infinitos como entidades (infinito ac-

tual), sino del llamado infinito potencial, propio de los números naturales. Las entidades matemáticas no existen en sí mismas, sino que son construcciones del pensamiento, producidas por un acto de creación libre de la mente humana y el método axiomático no juega ningún rol en estas construcciones. Por el contrario, si no es posible mostrar que una entidad se ha construido o es construible mediante procesos intuitivos ya conocidos, entonces tal entidad no debe ser admitida por la matemática.

3) La matemática es totalmente independiente de la lógica y esta última sólo es útil para la creación del lenguaje matemático y su análisis. Por el contrario, para los intuicionistas, la lógica depende del pensamiento matemático intuitivo y, por lo tanto, el principal objetivo de la lógica teórica es formalizar los procedimientos del pensamiento matemático. Más aún, a la lógica así concebida no le interesarán más los procesos deductivos que tradicionalmente se consideran esenciales para una prueba, sino que deberá indagar sobre las formas de construcción o procesos constructivos de la prueba. Por lo tanto, demostrar la existencia de una entidad será dar su método de construcción y probar una afirmación será exhibir la forma de construcción de la prueba, i.e., el método de cálculo o algoritmo que en un número finito de pasos permita su construcción. La forma de construcción de los números naturales es un ejemplo paradigmático de construcción intuicionista, ya que a partir de la unidad y la operación «sucesor» se construyen todos los números de la serie. Y, dado que para cualquier número natural n se puede mostrar que tiene un sucesor n' porque es posible exhibirlo, entonces la afirmación de que existen infinitos números naturales es rigurosamente cierta. Así, los únicos conjuntos numéricos que existen son aquellos que son construidos en forma similar a la de los naturales, es decir, el llamado infinito *potencial*. En general, para un intuicionista, probar un enunciado matemático es lo mismo que exhibir un método de construcción de la entidad de la cual habla el enunciado. Por ejem-

plo, para un intuicionista, probar el enunciado matemático «Para todo número primo, existe uno mayor», consiste en exhibir un método que, dado un número primo cualquiera, permita construir el número primo que le sigue. Esta postura llevó al intuicionismo a una posición muy peculiar respecto a las llamadas *demostraciones por el absurdo,* en particular, respecto de las demostraciones de existencia propias a la matemática, como por ejemplo, existen infinitos números primos. Para un intuicionista no es posible demostrar la existencia de una entidad por el absurdo, por cuanto ésta presupone partir de la no existencia y tratar de llegar a una contradicción, para luego derivar por el absurdo la existencia. En realidad, si se piensa en términos de construcciones mentales, es plausible afirmar que para probar la existencia de una entidad, no es condición suficiente suponer que su no existencia lleva a una contradicción. Por ende, la existencia de una entidad sólo puede probarse en forma directa, mediante su exhibición o forma de construcción. Por el contrario, para un intuicionista, sí es aceptable que por el absurdo se llegue a una prueba de no existencia, ya que resulta totalmente plausible que, si al tratar de construir mentalmente una entidad se llega a un absurdo, entonces su construcción no es posible y la entidad en cuestión no existe.

4) La principal crítica de Brouwer al razonamiento matemático clásico consistió en rechazar la aplicación irrestricta del *Principio del Tercero Excluido* (PTE), tal como lo había expresado Hilbert en su famoso *dictum: todo problema matemático particular puede tener solución, en el sentido de que la cuestión bajo consideración puede ser afirmada o refutada,* y sostienen que en matemática no es cierto que, dada una afirmación cualquiera, sólo existe la posibilidad de demostrarla o rechazarla. Veamos un ejemplo: Supóngase que se quiere probar la siguiente afirmación: *Sea p cualquier número primo y N cualquier número natural; entonces p divide a* N^2*, si y sólo si p divide a N.* Si se acepta el *Principio del Tercero Excluido,* debería poder probarse que para cualquier valor de *p* y *N,*

la afirmación en cuestión puede decidirse bajo cualquiera de las dos siguientes suposiciones : (i) p divide a N y (ii) p no divide a N. Pero resulta que en este caso no se puede probar el problema bajo ninguna de las dos suposiciones. Luego, pensar el problema tomando el PTE como válido induce a pensar que el problema tiene solución, cuando en realidad no la tiene y, por ello, el PTE no está justificadamente aplicado. En otras palabras, hay problemas para los cuales la alternativa A ∨ ¬A no es exhaustiva como lo presupone el matemático clásico, quien, si prueba que una información matemática A es falsa, infiere inmediatamente que ¬A es verdadera. Además, más allá de los ejemplos matemáticos que abundan en la literatura sobre este tema, existen razones para rechazar el PTE desde los supuestos filosóficos intuicionistas más básicos. En efecto, sobre la base de interpretar *verdad* en términos de *tener una prueba constructiva* y *falsedad* en términos de *generar una contradicción*, para un intuicionista, el PTE significa lo siguiente: dada una proposición cualquiera A, A *tiene prueba constructiva o genera una contradicción*. Pero de esta lectura no surge la necesidad de admitirlo como válido, ya que bien podría tratarse de una afirmación respecto de la cual no se pudiera construir una prueba constructiva y que no por ello su rechazo generara un absurdo.

El rechazo del PTE no sólo constituye el abandono de la lógica clásica, sino que también profundiza la crítica al programa de Hilbert, en lo que atañe a los resultados metamatemáticos. En efecto, demostrar la completitud de un sistema logístico significa probar que para cada proposición del sistema, ella o su negación deben ser teorema, i.e., ⊢ A o ⊢ ¬A y demostrar la decidibilidad consiste en encontrar un método efectivo (i.e., algoritmo) que determine para cada fórmula A, si es o no es un teorema, i.e., si hay o no hay una prueba de A. Debe recordarse que el intento de demostrar estas propiedades metateóricas fue el motor de los trascendentales resultados de imposibilidad expresados en los teoremas sobre la com-

pletitud de la lógica de primer orden (1930) y la incompletitud de la aritmética (1932) de K. Gödel y los relativos a la indecidibilidad de la lógica de primer orden de A. Church y A. M. Turing, este último mediante la creación de la primera computadora de papel, conocida hoy bajo el nombre de *Máquina de Turing*.

Dado que a menudo nos referiremos a los números infinitos creados por Cantor y suponiendo que también ayudará al lector a comprender mejor las críticas intuicionistas, en la sección 3.4, (*Notas adicionales*) daremos una breve reseña de dichos números.

3.2 La lógica intuicionista

3.2.1 Caracterización general

Dado el rechazo a la aplicabilidad en forma irrestricta del Principio del Tercero Excluido en el razonamiento matemático se hacía necesario disponer de una lógica que no fuera la lógica clásica. Si bien la lógica intuicionista fue concebida por el mismo Brouwer, fue Heyting quien, en 1956, la formalizó bajo el sistema en el cual hoy generalmente es presentada y dio su primera interpretación en términos de prueba. Siguiendo la idea de Brouwer de que la lógica debía reproducir los procesos mentales de la actividad matemática, propuso entender por la verdad de una afirmación matemática su prueba y asignar el significado a las conectivas lógicas también en términos de prueba. De esta forma, el concepto semántico de verdad de la lógica clásica se transforma en un concepto epistémico y el concepto de prueba ya no es caracterizado en términos de derivación, sino que adquiere el estatus de una construcción mental. La primera semántica de la lógica intuicionista fue dada por Heyting en 1956. Pese a que, como veremos más adelante, se construyeron otras semánticas para esta lógica, daremos a continuación una breve descripción de ella porque entendemos que, por ser la que responde directamente a las motivaciones que dieron origen al intuicionis-

mo, ayudará al lector a comprender mejor los puntos centrales de esta lógica. Reproduciremos la formulación que de esta semántica hace D. van Dalen (1986), modificando la cláusula (ii) sólo a los efectos de hacer comprensiva la formulación a lectores no iniciados en estos temas.

Suponiendo que se tiene una comprensión intuitiva de la noción *a es una prueba de la fórmula A,* para el caso en el que A es atómica y, aceptando que el dominio de los valores de las variables es el conjunto de los números naturales, es posible elucidar qué significa *dar una prueba de una fórmula no atómica A en términos de sus componentes.* Nótese que en realidad lo que daremos es el significado de las conectivas proposicionales intuicionistas, bajo la suposición de que se sabe intuitivamente qué quiere decir *dar una prueba de una fórmula atómica.*

(i) **a** es una prueba de $A \wedge B$ sii **a** es un par $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ tal que $\mathbf{a}_1$ es una prueba de A y $\mathbf{a}_2$ es una prueba de B.

(ii) **a** es una prueba de $A \vee B$ sii **a** es un par $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ tal que $\mathbf{a}_1$ es una prueba de A o $\mathbf{a}_2$ es una prueba de B.

(iii) **a** es una prueba de $A \rightarrow B$ sii **a** es una construcción que convierte cada prueba **b** de A en una prueba **a**(**b**) de B.

(iv) nada constituye una prueba de $\bot$ (i.e., lo absurdo o lo contradictorio).

Se hace necesario realizar dos observaciones. En primer lugar, cabe hacer notar que en la interpretación dada no hay una cláusula para la negación. Esta queda comprendida en el caso atómico, debido al peculiar sentido que tiene la negación en la lógica intuicionista estipulado en la definición $\neg A =_{df.} A \vdash \bot$, según la cual negar una proposición equivale a decir que su afirmación conduce a una contradicción o absurdo. En segundo lugar, la cláusula (ii) se relaciona con la idea de Brouwer de que ninguna fórmula de la forma $A \vee B$ es probable a menos que uno de sus componentes sea probable, la cual, como ya vinos, condujo al rechazo del PTE.

Tal como surge de la interpretación presentada, las conectivas proposicionales del intuicionismo, aunque tipográficamente iguales, quedan caracterizadas por reglas de inferencia distintas de las clásicas y, por ello, tienen un significado diferente al que tienen en la lógica clásica. Hay quienes han propuesto marcar con algún signo especial las conectivas intuicionistas, poniendo un subíndice que las identifique, por ejemplo $\neg_I, \vee_I, \wedge_I, \rightarrow_I$. Pero, como aceptar esta propuesta dificulta la escritura, en general se conviene en adoptarla sólo para casos imprescindibles en los cuales, el no usarla generara algún tipo de confusión conceptual. Pasaremos ahora a analizar con más detalle qué otras reglas clásicas dejan de ser válidas en el intuicionismo a fin de comprender mejor la forma en que ha cambiado el significado de las constantes lógicas y su noción de consecuencia lógica.

Si el Principio del Tercero Excluido no es válido, entonces tampoco pueden resultar válidas las reglas de inferencia que en lógica clásica posibilitan su demostración, a saber: una de las formas de la demostración por el absurdo, $\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B) \vdash A$ y la regla de Doble Negación clásica $\neg\neg A \vdash A$, empleadas en la prueba correspondiente que sigue:

1)

1	$\neg(A \vee \neg A)$	supuesto(*)	⊕
2	A supuesto		
3	$A \vee \neg A$	$I\vee$ 2	
4	$\neg(A \vee \neg A) \wedge \neg((A \vee \neg A)$	$I\wedge$ 1,3	
5	$\neg A$.	$I\neg$ 2-4	⊕
6	$\neg A \vee A$	$I\vee$ 5	
7	$\neg(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg A)$	$I\wedge$ 1,6	
8	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	$I\neg$ 1-7	
9	$A \vee \neg A$	DN	⊕

(*) El signo ⊕ indica un paso no admitido o con restricciones.

En primer lugar, debe hacerse notar que toda esta prueba tiene un carácter no constructivo porque se corresponde con el esquema de demostración de la versión no aceptada de prueba por el absurdo, o sea, $\neg A \rightarrow \bot \vdash A$. Para un intuicionista no es válido llegar a la verdad de una proposición partiendo de una fórmula negada, i.e., cuya negación implica una contradicción, porque, para obtener su verdad, hay que aplicar la regla clásica de Doble Negación (paso 9), o sea, $\neg\neg A \vdash A$. Sin embargo, sí son perfectamente admisibles las pruebas por el absurdo de la forma $A \rightarrow \bot \vdash \neg A$, es decir la regla conocida por nosotros como Introducción de la Negación de NC. A su vez, las razones para rechazar $\neg\neg A \vdash A$, se fundan también en el significado peculiar de la negación intuicionista ya señalado. En efecto, si por *falsedad* se entiende generar una contradicción, (o sea, $A \vdash \bot$), entonces, de la afirmación *A engendra una contradicción engendra a su vez una contradicción* no se sigue que haya una prueba para A. Esta restricción se manifiesta también en la lógica de predicados, ya que el intuicionismo no admite que de la suposición de que una entidad no exista se llegue a una contradicción, pueda inferirse que dicha entidad exista.

Naturalmente, el significado otorgado a la negación arrastra la invalidez de otras reglas clásicas que la involucran. Por ejemplo, no son inferencias válidas las llamadas *leyes de De Morgan*, (i) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ y (ii) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$, ya que aplicando (i) a la fórmula $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ se podría llegar sólo a $\neg\neg A \vee \neg\neg B$, y aplicando (ii) a la fórmula $\neg(\neg A \vee \neg B)$ se llegaría sólo a $\neg\neg A \wedge \neg\neg B$. Tampoco vale la regla de transposición clásica, $\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B$ porque, para el intuicionista, partiendo de $\neg B \rightarrow \neg A$ sólo se puede llegar a $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$. El significado de la negación causa también la invalidez de la inferencia llamada *Ley de Peirce* $A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$, la cual es característica del condicional material clásico. Si el lector intenta hacer en el cálculo NC una deducción de ella, comprobará que su prueba involucra aplicaciones de las reglas de Reducción al Absurdo, de Doble Negación y de Interdefinición entre las conectivas $\rightarrow$ y $\wedge$, no aceptadas en la lógica intuicionista.

De lo dicho y con relación a las conectivas proposicionales se desprenden otras características formales intuicionistas, aun más generales de la lógica, a saber: (i) las constantes lógicas resultan no ser interdefinibles como sí lo son en la lógica clásica, o sea que todas son constantes lógicas primitivas; y (ii) las conectivas intuicionistas no son veritativo-funcionales, en el sentido de que no es posible construir una matriz finita de valores de verdad que originara una lógica multivalente completa. Por nuestra parte, consideramos que hay buenas razones para considerar que lo afirmado en (i) es coherente con las tesis intuicionistas de que ni los conceptos matemáticos ni las afirmaciones matemáticas son reducibles a la lógica, tal como lo pretendía el logicismo y de que no hay razón para evitar los indefinibles, ya que a la postre, ellos se comprenden por medio de la intuición. Respecto de (ii) es interesante destacar que Gödel, en 1932 demostró que, de haber una matriz multivaluada, ésta sería infinita.

3.2.2 La semántica de mundos posibles para la lógica intuicionista

Además de la interpretación dada en términos de prueba, la lógica intuicionista ha recibido una gran variedad de interpretaciones tendientes a mostrar la invalidez, en esta lógica de ciertos teoremas clásicos. La mayoría de ellas son formulaciones algebraicas, tales como las topológicas de Beth (1956) y Kripke (1963). También Gödel (1958), siguiendo la línea de Kleene, creó una interpretación de tipo efectiva en términos de funciones recursivas. Desde una perspectiva totalmente diferente, Tarski y McKinsey (1948) dieron una interpretación de la lógica intuicionista en términos de la lógica modal, en particular del sistema modal S4 de Lewis, en el sentido siguiente: si en un teorema del cálculo de Heyting toda variable proposicional α se sustituye por $\Box\alpha$,(i.e., necesario α), la negación por $\neg\Diamond$ (i.e., no posible α) y el signo $\rightarrow$ por $\Rightarrow$ (i.e, im-

plica estrictamente), entonces, todas las implicaciones que son teoremas de la lógica intuicionista (en la presentación de Heyting) son también teoremas de S4; y conversamente, realizando la traducción adecuada, todo teorema de S4 se convierte en un teorema del cálculo intuicionista de Heyting. Obviamente, esta traducción traslada el problema de la interpretación de la lógica intuicionista a la interpretación de la lógica modal, en particular del sistema S4 de Lewis. Siguiendo esta línea, en los libros recientes sobre lógicas estructurales comúnmente se presenta una semántica para la lógica intuicionista construida a partir del ya estandarizado modelo en términos de mundos posibles de S. Kripke, la cual, además de acordar en líneas generales con la semántica de Tarski y McKinsey, parece capturar las ideas fundamentales de la semántica en términos de prueba dada por Heyting. A continuación adaptaremos la versión de G. Priest (2001).

En forma similar a los modelos de Kripke para la lógica modal normal, un modelo intuicionista M_I es una estructura $<M, \mathfrak{R}, V>$, en la que $\mathfrak{R}$, al igual que en S4, es reflexiva y transitiva y que, además, cumple con la *condición de herencia*, a saber:

(Cond. H) Para toda letra proposicional p y para todo $m \in M$, si V (p, m) = 1 y $m \,\mathfrak{R}\, m'$, entonces V (p, m') = 1.

Las condiciones de verdad para las restantes fórmulas moleculares son las mismas que las dadas en 2.3.2. A nuestro propósito interesa reflexionar acerca del significado que adquiere la negación y el condicional tomándose en cuenta la condición H.

Prima facie, la condición de verdad de la negación parece la misma que en la lógica modal clásica, a saber:

Para toda fórmula A, $V(\neg A, m) = 1$ sii para todo m', tal que $m \,\mathfrak{R}\, m'$, $V(A, m') = 0$.

Pero, como por H, si una fórmula es verdadera en un mundo, también debe seguir siendo verdadera en todo mundo accesible, resulta que afirmar $\neg A$ es lo mismo que afirmar $\Box\neg A$. Esta interpretación de la negación resulta totalmente consistente con la concepción de la falsedad intuicionista, ya que decir que una fórmula

es falsa es decir que conduce a una contradicción y que, por lo tanto su prueba es imposible. En forma análoga, si $V(A \rightarrow B, m) = 1$, entonces por la condición H , $V(A \rightarrow B) = 1$ en todo mundo posible, y entonces, para un intuicionista afirmar el condicional $A \rightarrow B$ tiene el significado de $\Box(A \rightarrow B)$. Esta interpretación también resulta consistente en términos de prueba, ya que afirmar que la fórmula $A \rightarrow B$ es verdadera significa que hay una prueba que permite transformar la prueba de A en prueba de B (cfr.3.2.1 (iii)). Luego, si la fórmula $A \rightarrow B$ tiene una prueba, entonces nunca puede conducir a un absurdo y, por ello, es necesaria. Nótese que si el modelo intuicionista M_I tiene un solo mundo, las condiciones de la función valuación coincide con las condiciones clásicas.

El lector se dará cuenta que, mediante la condición H, se ha podido traducir la lógica intuicionista a un sistema modal equivalente a S4, ya que una fórmula $\neg A$ se interpreta como $\Box\neg A$ (o por su equivalente $\neg\Diamond A$) y una fórmula condicional $A \rightarrow B$ se interpreta como $\Box(A \rightarrow B)$, i.e., como $A \Rightarrow B$. Por este motivo, varios lógicos han sostenido que la lógica intuicionista está incluida en la lógica modal clásica, bajo la forma del sistema S4, de acuerdo con la semántica de Tarski y MacKinsey mencionada al comienzo de esta subsección. En otras palabras, si una inferencia es válida en una lógica intuicionista, también es válida en la lógica clásica. Sin embargo, la conversa no es cierta, ya que hay inferencias válidas en lógica clásica que no lo son en la lógica intuicionista, tal como se lo mostró en 3.2.1.

3.2.3 El cálculo proposicional intuicionista de Heyting (J)

Tal como fue presentado por Heyting, el cálculo proposicional intuicionista J fue formalizado al estilo-Hilbert. Comparte con la lógica clásica proposicional la misma sintaxis, pero, a diferencia de ella, J necesariamente tiene como símbolos lógicos primitivos todas las conectivas proposicionales. Según la formulación de Heyting de 1956, sus axiomas son:

J1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
J2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
J3 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
J4 $(A \wedge B) \rightarrow A$ / $(A \wedge B) \rightarrow B$
J5 $A \rightarrow (A \vee B)$ / $B \rightarrow (A \vee B)$
J6 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
J7 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
J8 $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

Se agrega, como única regla de inferencia el *Modus Ponens* (MP) (i.e., $A, A \rightarrow B \vdash B$).

Debemos recordar que la idea de Heyting era expresar en el cálculo sólo las inferencias válidas para un intuicionista. De ahí que J incluya como axiomas aquellos teoremas de forma implicativa que, traducidos a esquemas inferenciales, justificasen sólo las inferencias que Brouwer admitía para la matemática. A modo de ejemplo, puede comprenderse fácilmente que el axioma J3 cumple con esta exigencia de acuerdo a la definición recursiva de prueba dada en 2.3.1. En efecto, por (iii), para dar una prueba de (J3), o sea de $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$, se debe encontrar una construcción **a** que convierta la prueba **b** de A en una prueba del consecuente **a**(**b**). Bajo el supuesto de que hay una prueba **b** de A, **a**(**b**) se construiría a partir del supuesto de que hay una prueba **c** de B, entonces, aplicando dos veces MP y la cláusula (i), hay una prueba (**b**,**c**) de $(A \wedge B)$.

Si comparamos los axiomas de J con los de la lógica clásica en el sistema de Hilbert (H_P) dado en 1.3 podemos observar las siguientes analogías y diferencias: 1) el condicional queda caracterizado por los mismos axiomas; (ii) la disyunción queda también definida por los mismos axiomas, habida cuenta que J5 incluye los dos casos de la ley de Adición; (iii) aunque bajo forma diferente, los axiomas que corresponden a la conjunción son equivalentes; y (iv) con relación a la negación, J y H_P comparten solamente las leyes aceptadas por el intuicionismo (H9 y H10) pero difieren precisamente en la ley de Doble Negación, ya que ésta está ausente en J.

De estas similitudes se sigue que H_P y J comparten el cálculo proposicional positivo H_{P+}. Finalmente, en el sistema de Heyting , por derivación (o *deducción)* se entiende lo mismo que en la lógica clásica y de ahí que en J también sea posible demostrar el metateorema de la deducción (o regla de Introducción del condicional de NC) como regla de inferencia derivada, a saber:

Si $A_1, \ldots, A \vdash B$ entonces $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$.

Prima facie, J y H_P parecen diferir sólo en la caracterización de la negación, ya que H_P tiene como axioma la ley $\neg\neg A \rightarrow A$ que J no posee. Asimismo, esto podría inducir a pensar que, si a los axiomas de J se agrega, o bien esta ley o bien el PTE (i.e., $A \vee \neg A$), se obtiene la lógica clásica y por lo tanto el conjunto de leyes o teoremas de la lógica intuicionista debe ser menor que el conjunto de las leyes o teoremas de la lógica clásica. Sin embargo, en tanto conjunto de teoremas, hay un sentido en el que J tiene el mismo conjunto de teoremas que LC, tal como lo mostraremos a continuación. Ya hemos señalado que en lógica clásica todas las conectivas son interdefinibles y, por ello, se podrían traducir todas las fórmulas de la lógica clásica en términos de la negación y conjunción mediante las dos siguientes definiciones de la lógica clásica: (i) $A \vee B =_{df} \neg(\neg A \wedge \neg B)$ y (ii) $A \rightarrow B =_{df} \neg(A \wedge \neg B)$. Por ejemplo, si E es la fórmula correspondiente al axioma H1 (i.e., $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, entonces la formula E' resultante de la traducción será $\neg(A \wedge (B \wedge \neg A))$. Pues bien, K. Gödel (1933) demostró, en tanto caso particular de un teorema más general, el siguiente metateorema: para toda fórmula E del cálculo proposicional clásico, si E es teorema en la lógica clásica, entonces su correspondiente traducción E' es teorema en el cálculo intuicionista, simbólicamente: si $\vdash_{LC}$ E en entonces $\vdash_J$ E'. Más sintéticamente, que todos los teoremas de la lógica clásica expresados en términos de la conjunción y la negación, son teoremas intuicionistas. Pero, como se comprenderá después, de este resultado no debe concluirse que la lógica clásica es parte de la

lógica intuicionista, como algunos erróneamente lo han entendido. Pero, para mostrar que en realidad lo que sucede es más bien lo contrario, debemos desarrollar primeramente la versión inferencial de la lógica intuicionista, tanto como cálculo de deducción natural como bajo la lógica de secuentes.

3.2.4 El enfoque de Gentzen

Cuando Gentzen presentó los cálculos de deducción natural, dio en primer lugar el cálculo de deducción natural para la lógica intuicionista (NJ) y luego el de la lógica clásica (NC), ya que su intención era presentar la misma lógica de Hilbert, pero bajo una forma más natural y constructiva. En primer lugar, recordemos que los cálculos de deducción natural constan de reglas de introducción y eliminación en la conclusión para cada conectiva lógica y que, según Gentzen, las reglas de introducción otorgaban el significado a cada conectiva, mientras que las de eliminación se podían inferir de las primeras. Respecto de las conectivas $\wedge$ $\vee$ y $\rightarrow$ el cálculo intuicionista NJ comparte con NC las mismas reglas de Introducción y Eliminación, aun cuando en NJ las conectivas no sean interdefinibles. Por este motivo sólo formularemos las reglas correspondientes a la negación.

Introducción de la Negación (I ¬)

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}$$

Eliminación de la Negación (E ¬)

$$\frac{\bot}{B}$$

En primer lugar, se debe recordar que el signo $\bot$ debe leerse como lo *contradictorio* o lo *absurdo*. En segundo lugar, se debe hacer no-

tar que NJ y NC también coinciden en la regla I ¬, pero no en E ¬, ya que en este lugar, el cálculo NJ tiene la regla que afirma que de una contradicción o absurdo, se sigue cualquier fórmula, debida a Duns Escoto y conocida con el nombre *Ex falso sequitur quodlibet,* la cual, tal como lo mostraremos en el capítulo siguiente, es rechazada en otras lógicas no clásicas. El lector podrá comprobar fácilmente que esta regla no permite deducir en NJ el PTE. Gentzen mismo afirma que el cálculo NC se puede obtener ampliando la base deductiva de NJ con el PTE o con la regla de Doble Negación clásica E ¬(o sea, $\neg\neg A \vdash A$). Simplemente como información para el lector interesado, queremos agregar que aún es posible obtener una negación aún más débil que la intuicionista. En efecto, si a la regla I ¬(que es válida en NJ como en NC), se le agrega la siguiente versión de la Eliminación de la negación:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ \neg A\end{array}}{\bot}\quad (E\,\neg)$$

se obtiene la llamada lógica proposicional *minimal* (o *mínima*). La versión axiomática de este sistema, creada por Kolmogoroff y Johanson (1924-25), permite visualizar mejor la reducción que se hace de la negación, ya que se forma agregando al cálculo H_{P+} solamente la forma de reducción al absurdo $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ que es el axioma J6 de la lógica intuicionista.

A fin de completar e análisis de la noción de consecuencia de la lógica intuicionista, debemos retomar el cálculo de secuentes de Gentzen presentado en 2.4.2. Lo dicho acerca de las características generales del cálculo de secuencias la lógica clásica, o sea, el cálculo SC, en general también vale para el cálculo de secuencia intuicionista SJ. Sin embargo, entre ellos hay una diferencia que, según las propias palabras de Gentzen, se describe de la siguiente manera: *La distinción entre la lógica intuicionista y la lógica clásica, es, exteriormente, de otra naturaleza en los cálculos LJ y LK que en los cálculos NJ y NK.*

Para estos últimos, la distinción se fundaba en la eliminación o aceptación del Principio del Tercero Excluido, mientras que en los primeros se expresa en la condición del postsecuente. (1955, pág. 48). Más precisamente, las derivaciones en SJ tienen una restricción que las distingue de las derivaciones en SC, a saber: en el postsecuente de cada H-secuencia no puede figurar más que una S-fórmula. En otras palabras, ninguna secuencia puede tener más de una fórmula en el postsecuente. Además, las reglas de SJ garantizan que toda J-derivación se transforma en otra J-derivación que sigue manteniendo la restricción de tener una sola fórmula en el postsecuente. Esta restricción hace que la regla estructural de Atenuación no pueda aplicarse en un postsecuente que cuenta con una fórmula y por ello, no hay reglas ni de contracción ni de permutación en el postsecuente. A fin de hacer más sencilla la exposición, expondremos el cálculo de secuentes intuicionista SJ en la versión que, en el mismo libro de Gentzen, realiza R. Feys, excluyendo algunas las letras griegas que representan secuencias. Puesto que es mucho más simple de usar en la práctica, permite también mostrar, tal como lo hace el mismo Feys, las restricciones que se deben aplicar a la lógica intuicionista.

Reglas estructurales para SJ

	A izquierda (o en el prosecuente o antecedente)	*A derecha (o en el postsecuente o consecuente)*
Atenuación	$\dfrac{\Gamma \dashv \delta}{A, \Gamma \dashv \delta}$ (A⊣)	$\dfrac{\Gamma \dashv}{\Gamma \dashv A}$ (⊣ A)
Contracción	$\dfrac{A, A, \Gamma \dashv \delta}{A, \Gamma \dashv \delta}$ (C⊣)	*no hay*
Permutación	$\dfrac{\Gamma, A, B \dashv \delta}{\Gamma, B, A, \dashv \delta}$ (P⊣)	*no hay*
Eliminación o Corte $\dfrac{\Gamma \dashv A \quad A, \Omega \dashv \delta}{\Gamma, \Omega \dashv \delta}$		

(II) Reglas operatorias para SJ

	En el prosecuente (o antecedente)	*En el postsecuente (o consecuente)*
$\wedge$	$\dfrac{A, \Gamma \dashv \delta}{A \wedge B, \Gamma \dashv \delta} \quad \dfrac{B, \Gamma \dashv \delta}{A \wedge B, \Gamma \dashv \delta}$ $(\wedge\dashv)$	$\dfrac{\Gamma \dashv \Omega, A \qquad \Gamma \dashv B}{\Gamma \dashv A \wedge B}$ $(\dashv\wedge)$
$\vee$	$\dfrac{A, \Gamma \dashv \delta \qquad B, \Gamma \dashv \delta}{A \vee B, \Gamma \dashv \delta}$ $(\wedge\dashv)$	$\dfrac{\Gamma \dashv A}{\Gamma \dashv A \vee B} \quad \dfrac{\Gamma \dashv B}{\Gamma \dashv A \vee B}$ $(\dashv\wedge)$
$\to$	$\dfrac{\Gamma \dashv A \qquad B, \Omega \dashv \delta}{A \to B, \Gamma, \Omega \dashv \delta}$ $(\to\dashv)$	$\dfrac{A, \Gamma \dashv B}{\Gamma \dashv A \to B}$ $(\dashv\to)$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \dashv A}{\neg A, \Gamma \dashv}$ $(\wedge\dashv)$	$\dfrac{A, \Gamma \dashv}{\Gamma \dashv \neg A}$ $(\dashv\neg)$

En ambos tipos de reglas δ es una sola fórmula o un conjunto vacío y nunca una secuencia de fórmulas.

Pasaremos ahora a mostrar cómo se refleja en SJ la invalidez de ciertas leyes clásicas (cap. 2, ejs 5 y 6).

2) *Tercero Excluido*

$$\begin{array}{ll} A \dashv A & \text{Ax.} \\ \hline \dashv A, \neg A & \dashv \neg \oplus \\ \hline \dashv A \vee \neg A & \dashv \vee \end{array}$$

3) *Doble Negación*

$$\begin{array}{ll} A \dashv A & \text{Ax.} \\ \hline \dashv A, \neg A & \dashv \neg \oplus \\ \hline \neg\neg A \dashv A & \neg A \dashv \\ \hline \dashv \neg\neg A \to A & \dashv \to \end{array}$$

Los pasos indicados por ⊕ son erróneos en NJ ya que o bien tienen más de una fórmula en el postsecuente o bien aplican una regla inexistente en SJ. La inferencia conocida como Ley de Peirce, $(A \to B) \to A \vdash A$, presenta un problema peculiar. La prueba en el cálculo de deducción natural clásico NC depende de reglas que involucran la negación clásica, mientras que en la lógica de secuentes

SC admite una demostración sin negación. Sin embargo, ella sigue siendo inválida en SJ porque, como se verá en la demostración, hay pasos que tienen más de una fórmula en el postsecuente o se aplica una regla estructural no admitida en SJ.

4) *Ley de Peirce*
Prueba en NC:

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	supuesto
2	$\neg A$	supuesto
3	A	supuesto
4	$\neg A \wedge A$	$I \wedge$ 2,3
5	B	ECQ, 4
6	$A \rightarrow B$	$I \rightarrow$ 3-5
7	A	$E \rightarrow$ 1,6
8	$\neg A \wedge A$	$I \wedge$ 2,7
9	$\neg\neg A$	$I \neg$ 2-8
10	A	$E \neg$, 9 $\oplus$

5) *Ley de Peirce*
Prueba en SC:

$A \dashv A$	Ax.	
$A \dashv A, B$	$\dashv A$	$\oplus$
$A \dashv B, A$	$\dashv P$	$\oplus$
$\dashv A \rightarrow B, A$	$\dashv \rightarrow$	$\oplus$
$\dashv A, A \rightarrow B \qquad A \dashv A$	$\dashv P$ *plus* Ax.	$\oplus$
$(A \rightarrow B) \rightarrow A \dashv A, A$	$\rightarrow \dashv$	$\oplus$
$(A \rightarrow B) \rightarrow A \dashv A$	$\dashv C$	
$\dashv ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	$\dashv \rightarrow$	

Debido a esto se plantea un problema acerca de cuál es la conectiva intuicionista cuyo significado es responsable de la disidencia fundamental entre ella y la lógica clásica. Al respecto, Prior (1962), se pregunta si esta disidencia radica, o bien en el significado de la negación o bien en los significados del condicional y de la disyunción. Analizaremos con más detalle esta cuestión, ya que atañe directamente al problema del significado de las constantes lógicas y a la noción de consecuencia lógica de la lógica intuicionista.

Con relación a la disyunción ya vimos que se caracteriza por las mismas reglas de introducción y eliminación de la disyunción. Pese a esto, no es válido el PTE, $\vdash A \vee \neg A$, porque se afirma que, para los intuicionistas, esta disyunción no es exhaustiva, en el sentido de que podría ser que no hubiera prueba ni de A ni de ¬A. Sin embargo, sí son reglas válidas las conocida por Silogismo *Disyuntivo* (SD) $A \vee B, \neg A \vdash B$ y *Dilema constructivo simple*, el cual es un caso de la regla E∨ y que dice: $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash C$. Sin embargo, un argumento similar se podría aplicar incluso a la regla E∨, ya que por generar una demostración por casos, a fin de asegurar la constructividad de la prueba de la conclusión, se necesita que la premisa disyuntiva contemple todos los casos. Por ejemplo, si se quiere demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo plano es de 180°, se necesita que la premisa disyuntiva contemple las tres clases de triángulos, isósceles, equiláteros y escalenos y que de cada uno de ellos se verifique que su suma sea de 180°. Por ello, más bien creemos que lo que el intuicionista quiere mostrar es simplemente que hay casos, de la forma $A \vee \neg A$, en los cuales la disyunción no es exhaustiva precisamente porque en ellos está en juego el significado de la negación y el principio de bivalencia de la lógica clásica. De ahí que se opongan a la aplicación irrestricta del PTE y, por ello, no lo consideren una ley lógica pero sigan siendo válidas las otras reglas características de la disyunción.

Con relación al condicional, J y LC se comportan igual, ya que ambos caracterizan el signo → por los dos axiomas de Hilbert correspondientes (H1 y H2). Sin embargo, la ley de Peirce es válida en LC pero no lo es en J. Pero, puede mostrarse sencillamente que la ley de Peirce es independiente de H1 y H2 si se toma la siguiente matriz para el condicional:

A/B	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	2
2	0	0	0

y el valor 0 como distinguido. Mediante un algoritmo similar al de las tablas de verdad, es fácil comprobar que ambos axiomas conservan el 0 y la ley de Peirce no. También es posible mostrar con las siguientes matrices para el condicional y la negación,

Condicional

A/B	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	0
2	2	0	0

Negación

A	$\neg$A
0	0
1	0
2	0

la independencia de la Ley de Peirce y la Eliminación de la Doble Negación, $\neg\neg A \rightarrow A$, respecto de la negación intuicionista, caracterizada por $A \rightarrow \neg\neg A$, ya que mientras las dos primeras preservan el 0, esta última no. Si a la lógica intuicionista se le agrega la ley de Peirce, se obtiene la lógica clásica de la misma forma como si se le hubiera agregado la Doble Negación clásica. Si, por otra parte, se piensa que el condicional refleja en el lenguaje objeto de la lógica, el comportamiento de la noción metalingüística de deducibilidad y que el intuicionismo reniega de varias inferencias clásicas, es plausible entonces que el condicional cargue con parte de la disidencia entre LC y J. Pensamos que lo dicho sobre el condicional constituye un argumento fuerte a favor de la idea de Prior de que el condicional intuicionista tiene un sentido distinto que el clásico, porque en J se piensa el *Modus Ponens* sólo en términos de condicional y no bajo la forma $\neg(A \wedge \neg B), A \vdash B$. Pero, si se siguiera esta línea argumentativa, dado que las conectivas proposicionales no son interdefinibles en J, se podría coherentemente pensar que, en la lógica intuicionista, todas las reglas de inferencia se piensan sólo en virtud del significado de las conectivas que ocurren explícitamente en ellas, y entonces, todas tendrían un significado independiente y por lo tanto distinto del significado que se les asigna en LC, aun cuando el mayor peso de la disidencia se ponga en la negación.

3.3 La noción de consecuencia de la lógica intuicionista

Las restricciones impuestas a las reglas estructurales de SJ consignadas en 3.2.3 muestran claramente que la base inferencial de la lógica intuicionista es distinta de la base inferencial de la lógica clásica y, como ya hemos dicho, y dado que la base deductiva de una lógica determina su noción de consecuencia, entonces las nociones de consecuencia lógica también son distintas. En otras palabras, aunque la lógica clásica y la lógica intuicionista comparten los axiomas T1-T5 de Tarski, al no tener la misma base inferencial, la operación de consecuencia de LC es la operación de consecuencia de la lógica clásica, mientras que la base inferencial de J determina la operación de consecuencia lógica intuicionista. Nótese, además, que la diferencia respecto de la relación de deducibilidad consiste en que ésta se ve debilitada por las restricciones impuestas a dos de sus propiedades. La Monotonía, expresada por las dos reglas estructurales de *Atenuación*, se debilita por la restricción impuesta a la correspondiente regla de Atenuación en el postsecuente, según la cual, se puede adicionar una fórmula en el postsecuente sólo a una secuencia con postsecuente vacío, i.e., $\Gamma\dashv$. A su vez, la Idempotencia equivalente a la regla de Corte, se debilita por la restricción general de que no puede haber más de una fórmula en el postsecuente. En síntesis, que SJ comparta con SC una operación de consecuencia a lo Tarski sólo quiere decir que comparten una noción de consecuencia que es estructural o lógica y que las nociones de consecuencia lógica de la lógica clásica y del intuicionismo deben ser vistas como distintas especificaciones de la caracterización abstracta de la operación de consecuencia dada por Tarski. Obviamente, lo mismo se puede decir respecto de la noción de deducibilidad, ya que ésta expresa, en tanto relación, la noción de consecuencia sintáctica, que a su vez antes vimos es una especificación de la noción de consecuencia lógica abstracta.

Finalmente, los resultados mostrados anteriormente nos dicen que la lógica intuicionista J, no constituye un cálculo lógico estructuralmente completo, porque hay reglas que preservan las consecuencias del vacío, (i.e., de la forma $\emptyset \dashv$) pero que sin embargo no son reglas de J, como las ya señaladas anteriormente. Las restricciones impuestas a las reglas estructurales y la carencia de dos de ellas, hacen que sea considerada también una lógica subestructural. De ahí que, pese a que el conjunto de los teoremas de LC sea igual al de J, en el sentido dado de que cada fórmula que es teorema en LC es teorema en J –vía la definición respectiva– la noción de consecuencia de J resulte más débil que la noción de consecuencia de LC. Sintéticamente, en tanto conjuntos de consecuencias, $Cn(J) \subset Cn(CL)$. Más aún, en tanto lógicas de inferencias, Wojcicki (1988, 2.6.9) demuestra que la lógica clásica LC no es definible en la lógica intuicionista J. Además, se demuestra también que cualquier refuerzo no trivial que se haga de la base inferencial de J que satisfaga el cálculo de secuentes SJ, siempre resultará más débil que LC. Finalmente, aunque deductivamente más débil que la lógica clásica, J es una lógica deductiva, ya que su noción de consecuencia lógica satisface Atenuación en el prosecuente. Asimismo, tal como se sigue de las características señaladas, la lógica intuicionista J es un sistema divergente de LC, en el sentido del caso 1 (cfr. 1.5c).

3.4 Comentarios marginales: sobre el realismo de las entidades matemáticas

Algunos historiadores y comentaristas sostienen que el realismo acerca de las entidades matemáticas, hunde sus raíces en la concepción de la matemática de Pitágoras y Platón y se plasma definitivamente recién en el siglo XIX con la llamada *aritmetización del análisis,* en particular, con el tratamiento del infinito (o continuo) de los números reales tal como se presenta en las obras de

R. Dedekind (1831-1916) y G. Cantor (1845-1918). En cierto modo, esto es así por las siguientes razones: (i) porque la definición de número real mediante la noción de cortadura en el conjunto de los números racionales, le permitió a Dedekind afirmar que en el intervalo numérico [1,0] hay tantos números reales como en cualquier otro intervalo, concibiendo así el infinito como totalidad incompletable pero real i.e. infinito *actual.* ; y (ii) porque, sin lugar a dudas, la definición de conjunto infinito de Cantor, le permitió a éste generar, mediante métodos finitarios, una serie infinita de conjuntos numéricos a su vez infinitos. En efecto, a partir de la definición de conjunto infinito como aquel que es equinumerable con cada uno de sus subconjuntos, i.e., que sus elementos se pueden poner en correspondencia uno-a-uno con los elementos de sus subconjuntos, por un lado, y por el otro, de la definición de número cardinal de un conjunto, *card*(M) como «el resultado de realizar sobre un conjunto cualquiera M el doble proceso de abstraer la naturaleza de los elementos de M y su orden», Cantor determinó que el menor de los conjuntos numéricos infinitos estaba dado por el cardinal del conjunto N formado por el conjunto de los números naturales y por todo otro conjunto equinumeroso con él, y nombró a este conjunto mediante la letra hebrea ℵ con el subíndice 0, formalmente: $card(N) = \aleph_0$. Así, el cardinal de cualquier conjunto finito n es siempre menor que $\aleph_0$, i.e., $n < \aleph_0$. Luego, y a partir de la definición de *conjunto de partes* (o *conjunto potencia*) de un conjunto M, i.e. P(M), como el conjunto formado por todos los subconjuntos de M, Cantor demuestra el teorema según el cual, para cualquier conjunto M, $card(M) < card(P(M))$. Reiterando el proceso de hallar el conjunto de partes, obtiene la siguiente serie infinita de cardinales infinitos: $\aleph_0$, $card(P\aleph_0)$, $card(PP\aleph_0)$, ..., cuyo cardinal será, obviamente, cada vez mayor. Ahora bien, dado que P(M) es igual a 2^M, esta lista puede representarse como $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ... Pero, como la base 2 es una abreviatura de {1,2→, entonces $2^{\aleph_0} = card(P\aleph_0)$, y entonces, $2^{\aleph_0}$ es el cardi-

nal del conjunto de los números reales, o sea, el cardinal del continuo.

Definir el número real mediante la postulación de un conjunto numérico cuyo número cardinal infinito es $2^{\aleph_0}$ y lograrlo por procedimientos finitistas constituye uno de los puntos centrales que, como ya vimos, Brouwer refutó duramente en sus críticas a la matemática clásica. Matemáticos enrolados actualmente en el construccionismo matemático como A. S. Toelstra y D. van Dalen (1988) han formulado una teoría de conjuntos constructiva en la que se proponen nuevas formas de construcción para estos conjuntos infinitos más en concordancia con la lógica intuicionista. Finalmente, las investigaciones realizadas en ciencia cognitiva actual, particularmente en el campo de la enseñanza de la matemática y en el análisis de los diversos procesos cognitivos implicados en la comprensión de los conceptos matemáticos, han abierto, según nuestra opinión, una nueva perspectiva en relación con los problemas planteados. En efecto, en *Intuitions of Infinity and the Cantorian Theory* (1991), Dina Tirosh expone una experiencia realizada con estudiantes en la que muestra, en primer lugar, que las intuiciones primarias acerca del infinito, tales como la creencia de que hay una sola clase de infinito (potencial) y de que el todo no puede ser nunca equivalente a sus partes, no concuerdan con la noción de infinito subyacente a la teoría de Cantor. Y, en segundo lugar, que para la adquisición de este último hace falta desarrollar otras intuiciones secundarias sobre la noción de cardinalidad infinita, las cuales, si bien siempre entran en conflicto con las intuiciones primarias, culminan en la construcción del conjunto de intuiciones básicas requeridas para la posterior comprensión formal de la teoría de conjuntos de Cantor. Así, tanto la noción de cardinal infinito como de las otras nociones relacionadas tales como, límite, derivada, etc., se presentan como construcciones mentales logradas mediante el proceso sistemático de enseñanza de la matemática, a partir siempre de intuiciones primarias. Parecería ser entonces que, desde una perspectiva cognitivista, es posible la cons-

trucción de conceptos que impliquen la cardinalidad del continuo y que, por lo tanto, la aceptación de infinitos conjuntos numéricos de cardinalidad infinita no conduce necesariamente al realismo matemático.

Lecturas sugeridas

Para una información más avanzada pero sencilla de la lógica intuicionista se recomienda primero el libro de Graham Priest: *An Introduction to Non-classical Logic* (2001). Una presentación en español del mismo Heyting, se encuentra en *Introducción al Intuicionismo.* Para el lector que requiera una presentación más completa, se indica el excelente trabajo de Dick van Dalen, Intuitionistic Logic, publicado en el volumen III: *Alternatives to Classical Logic,* en *Handbook of Philosophical Logic* (1986). Para una información mayor sobre el intuicionismo matemático e inclusive de la crisis en los fundamentos de la matemática, en idioma español, se sugiere el libro de Morris Kline, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* En idioma inglés se recomiendan los clásicos textos de G.T. Kneebone, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics* (1963) y de Evert W. Beth, *The Foundations of Mathematichs, A Study in the Philosophy of Science* (1959). Capítulos muy iluminadores sobre la lógica intuicionista se encuetran en los libros de A.N. Prior, *Formal Logic* (1959) y de Sthephen C. Kleene, *Introduction to Metamathematic,* (1964), del cual hay traducción al español. Un excelente y breve análisis de los problemas filosóficos del intuicionismo matemático y su lógica se encuentra en el libro de Stephen Read, *Thinking about Logic. An Introduction to the Philosophy of Logic* (1995). Para un estudio más profundo del intuicionismo en relación con sus implicaciones filosóficas, se recomiendan los trabajos de M. A. E. Dummet, *Elements of Intuitionism* (1990) y The philosophical basis of Intuitionistic Logic, en *Truth and others Enigmas* (1978) y el artículo de Michael Hand,

Antirrealism and Falsity, en *What is negation?* (1999). Para un conocimiento más riguroso de la teoría de Cantor sobre los números transfinitos, se recomienda su libro *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (1915), el antes citado libro de S. C. Kleene y el clarísimo texto de Robert Stoll, *Set Theory and Logic* (1963).

4
La lógica de la relevancia y la crítica a la deducción clásica

4.1 La crítica a la deducción clásica y la exigencia de relevancia

En el capítulo anterior analizamos las objeciones que desde el intuicionismo matemático se llevaron a cabo a la lógica clásica, fundamentalmente a la validez irrestricta del Principio del Tercero Excluido. Vimos también que el rechazo de este principio implicó a su vez el abandono de la negación clásica y de todas las reglas cuya demostración la involucre. Sin embargo, otras inferencias clásicas no quedaron afectadas, como por ejemplo las llamadas paradojas de la implicación material, ya mencionadas en 2.3 a saber:

(i) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
(ii) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

conocidas generalmente con el nombre de *Paradoja Positiva* y *Paradoja Negativa*, respectivamente.

Ya dijimos también que éstas expresan afirmaciones intuitivamente extrañas. En efecto (i) dice que una oración verdadera es implicada por cualquier otra y (ii) dice que una proposición falsa implica cualquier proposición. Puede el lector constatar fácilmente que la versión inferencial de (i), i.e., $A \vdash B \rightarrow A$ no es otra cosa que la versión inferencial de la Paradoja Positiva. Asimismo, como en lógica clásica de $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ se infiere $(\neg A \wedge A) \rightarrow B$, la regla asociada $\neg A \wedge A \vdash B$ es la regla clásica descubierta por Duns Escoto, *Ex falso sequitur quodlibet* (EFSQ), conocida también como *Ex contradictione quodlibet* (ECQ). También vimos, al tratar

los aportes de C. I. Lewis a la noción de consecuencia lógica, que uno de los motivos por los que éste criticó la deducibilidad clásica fue precisamente la validez de estas paradojas. Sin embargo, sus sistemas modales, tal como fueron expuestos 2.3.1, en virtud de la regla modal derivada $\Box(A \rightarrow B) \vdash (\Box A \rightarrow \Box B)$ y la definición del condicional estricto, reproducen estas paradojas bajo la forma: $\Box A \rightarrow (B \Rightarrow A)$ y $\Box\neg A \rightarrow (A \Rightarrow B)$. Por ende, si bien la versión de C. I. Lewis de la deducibilidad clásica, profundizó el carácter necesario de las inferencias válidas, fracasó en su intento de evitar las paradojas mencionadas. El problema principal radica en que la aceptación de las paradojas posibilitan inferencias no aceptadas por la lógica del sentido común. En efecto, (i) válida la inferencia *París es la capital de Francia, luego, si Cervantes escribió El Quijote, entonces París es la capital de Francia*; y (ii) permite inferir *Cervantes escribió El Quijote* de, por ejemplo, *Hoy llueve y no llueve*. Para los lógicos intuicionistas, quienes criticaban a la lógica clásica más por su carácter no constructivo que por su noción de deducibilidad, estas inferencias no causan problema alguno, mientras que para otros, tales paradojas deben ser rechazadas como inferencias válidas porque conducen a conclusiones inaceptables. Para que una inferencia sea válida, argumentan, la conclusión debe ser relevante (o pertinente) respecto de las premisas, de ahí que una adecuada caracterización de la deducibilidad deba agregar al requisito de necesidad exigido en lógica clásica, el de relevancia.

Como ya fue afirmado en el capítulo 2, el condicional material refleja en el lenguaje objeto de un sistema lógico, la relación de consecuencia lógica clásica formulada en el metalenguaje. Por este motivo, los lógicos relevantes apuntan sus críticas al condicional material y proponen sustituirlo por otro condicional que preserve la relación significativa que, en el lenguaje natural, se exige entre el antecedente y consecuente de las oraciones condicionales, o sea, que refleje adecuadamente en el lenguaje objeto el requisito de relevancia exigido para la relación metalingüística de deducibilidad.

Comúnmente se considera que el artículo pionero sobre la lógica de la relevancia es el de Wilhelm Ackermann, *Begründung einer strengen Implikation* (*Fundamentos para una implicación fuerte*), publicado en 1956, y que el programa sobre esta lógica se inició en la segunda mitad del siglo XX, cuando Alan Ross Andedrson y Nuel D. Belnap, inspirados en las ideas de Ackermann, comenzaron a trabajar juntos. El primer resultado fue el libro de referencia ineludible titulado *Entailment, The Logic of Relevance and Necessity* (1975). En él los autores presentan varios sistemas, entre los cuales los dos más importantes son: el sistema R y el sistema E. El primero formaliza la relación de implicación relevante, mientras que el segundo, por ser una extensión de R, formaliza una relación de implicación que, además de relevante, es necesaria, denominada *entailment.* En ambos, el antecedente de una implicación es condición *relevantemente* suficiente para el consecuente. En otras palabras, la diferencia entre R y E radica en que, mientras en R el condicional expresa sólo la propiedad de relevancia, en E se agrega el requisito de necesariedad, en forma similar a la implicación estricta de C. I. Lewis. Sin embargo, en el sistema E pese a ser un sistema modal, no serán teoremas las paradojas de la implicación estricta de los sistemas de Lewis, ya que se trata de un sistema modal relevante. Pese a que Anderson y Belnap (A&B) prefieran el sistema E, investigadores actuales en la lógica de la relevancia, como Michael Dunn (1986, 2002), coinciden en considerar al sistema R como el paradigma de la familia que constituyen los múltiples sistemas existentes sobre esta lógica. Incluso A&B (1975, §28) dan razones para considerar a R un sistema más interesante que E. Entre ellas merecen destacarse las siguientes: 1) el fragmento implicacional de R es el más antiguo y fue formulado independientemente por Moh en 1950 y por Church en 1951; 2) R permite analizar la noción de relevancia en forma independiente de la noción de necesidad; 3) R es «estable» en el sentido matemático de que admite bases axiomáticas alternativas y modificaciones semánticas sin por ello abandonar el criterio de relevancia original; 4) en R es

posible expresar condicionales en los cuales se pide una relación «significativa» entre antecedente y consecuente, mientras que E carece de un sentido *contingente* del «si...entonces»; 5) existen métodos de decisión sintácticos y semánticos para el fragmento de R formado por las implicaciones de primer grado; y 6) R posee una forma de prueba en deducción natural que permite probar en forma sencilla cuándo una fórmula es válida.

Previamente a la presentación del sistema R, consideramos necesario hacer algunos comentarios, en cierta forma gramaticales, acerca de las expresiones que involucran el condicional y la implicación (o *entailment).* En la tradición lógica se acepta la distinción que se establece entre la oración condicional, *si A entonces B* y la implicación, *A implica B*, en el sentido de que, mientras el condicional material es una conectiva proposicional del lenguaje objeto de la lógica proposicional clásica, la implicación es una relación metalingüística particular entre enunciados. En otras palabras, se considera que la oración *Si Cervantes escribió El Quijote entonces París es la capital de Francia*, es distinta de la oración *«Cervantes escribió El Quijote» implica «París es la capital de Francia» o Cervantes escribió El Quijote implica que París es la capital de Francia.* Los lógicos relevantes no parecen estar de acuerdo con esta distinción y, en el apéndice del libro citado, titulado *Grammatical Propaedeutic*, A&B afirman que es filosóficamente respetable «confundir» la implicación o «entailment» con el condicional y sostienen que lo que realmente existe es una noción genérica para ambos, o sea, una especie de noción *condicional-implicación*, para la cual es posible construir una gramática lógica. De lo dicho ambos autores infieren que la distinción entre *Si A entonces B* y *A implica B* es nada más que gramatical. Consecuentemente, A&B sostienen que tal identidad de significado también vale para las oraciones condicionales contingentes, de tal forma que el enunciado implicacional correspondiente, también se hace contingente. Por ejemplo, dada la proposición condicional contingente, *Si hoy es lunes, entonces mañana es el cumpleaños de María,* también será contingente la

proposición *Hoy es lunes implica que mañana es el cumpleaños de María.* Diferencias gramaticales aparte, debemos aceptar que, desde la lógica del sentido común o lógica natural, A&B parecen tener razón, ya que en ella ambas nociones se usan en forma indistinta y la distinción entre ambas conlleva un proceso reflexivo que sólo se logra en el proceso de aprendizaje de la lógica. Sin embargo, como argumento en contra de la posición de A&B, nos preguntamos: ¿por qué una lógica debe satisfacer los usos del lenguaje natural y perder así su carácter normativo?

Ya dijimos que el punto central de la lógica de la relevancia se encuentra precisamente en la crítica que realizan a la noción de deducibilidad clásica, argumentando que, a diferencia de la versión «oficial» de deducibilidad, la deducción lógica exige relevancia, pues de no exigirse relevancia entre premisas y conclusión, deberían aceptarse como válidas inferencias que intuitivamente no lo son. Más aún, según A&B, la exigencia de relevancia es condición necesaria para la validez de un argumento desde hace más de dos mil años, cuando Aristóteles habló de la *deducción a partir de hipótesis* en los *Primeros Analíticos.* Lamentablemente, A&B no han dado una caracterización precisa de lo que debe entenderse por *relevancia*, sino que la caracterizaron como la conversa de la deducibilidad, en el sentido de que *A implica relevantemente a B* si y sólo *si A es usada en la deducción de B.* A los efectos de no introducir confusiones, utilizaremos el signo $\twoheadrightarrow$ para la implicación relevante y la fórmula A $\twoheadrightarrow$ B deberá leerse como *A implica relevantemente a B.* Simbólicamente: A $\twoheadrightarrow$ B sii A $\vdash_r$ B. Mostraremos ahora las consecuencias que se siguen de la aceptación de este criterio de relevancia.

(1) La primera inferencia que debe ser rechazada es obviamente la paradoja de la implicación material, llamada por ellos *Falacia de la Relevancia* o *Falacia Positiva,* A $\vdash$ B $\rightarrow$ A, porque su derivación exige violar la condición de relevancia, pues B no ha sido usada para la obtención de A, tal como se constata en la derivación respectiva que se presentó en el ejemplo 1) de 2.4.1.

(2) También resulta inválida la regla *Ex contradictione quodlibet* (ECQ), ya que en su demostración la premisa A ∧ ¬A no es usada en la deducción de ¬¬B y por lo tanto de B, tal como se muestra en la siguiente demostración:

1)	1	A ∧ ¬A	supuesto
	2	¬B	supuesto
	3	A	E ∧ 1
	4	¬A	E ∧ 1
	5	AT ¬A	I ∧ 3,4
	6	¬¬B	I ¬ 2-5
	7	B	E ¬ 6

(3) En R tampoco es válida la regla clásica conocida con el nombre de *Silogismo Disyuntivo* (SD), A ∨ B, ¬A ⊢ B. *Prima facie*, podría pensarse que la razón del rechazo SD consiste en que su prueba involucra el uso de la regla ECQ, tal como se observa en la prueba respectiva:

2)	1	(A ∨ B) ∧ ¬B	supuesto
	2	¬B	E ∧ 1
	3	A ∨ B	E ∧ 1
	4	A	supuesto
	5	A	Rep. 4
	6	B	supuesto
	7	B ∧ ¬B	I ∧ 5,6
	8	A	ECQ, 7 ⊕
	9	A	E ∨ 3, 4-5, 6-8

Sin embargo, no es esta la razón que llevaron a A&B a inclinarse por la posición de que el Silogismo Disyuntivo es el responsable o, según sus propias palabras, el «culpable principal» de la validez de la regla ECQ. La razón de esta decisión parece fundamentarse

en que hay una prueba de ECQ, debida a Lewis y Langford (1932), que hace uso del SD sin violar la exigencia de relevancia, a saber:

3)	1	$A \wedge \neg A$	supuesto
	2	A	$E \wedge$,1
	3	$\neg A$	$E \wedge$,1
	4	$A \vee B$	$I \vee$,2
	5	B	SD,3,4

Pero, podríamos preguntarnos ¿por qué aceptar la regla de $I\vee$ usada en el paso 5, habida cuenta que ella es la que posibilita el uso posterior de SD? Las razones que esgrimen A&B para justificar el rechazo de SD son de distinto tipo y muchas de ellas de carácter intuitivo, por lo cual no las analizaremos aquí. Al respecto, nos parece apropiado mencionar las observaciones que J. Michael Dunn (1986, 2002) realiza siguiendo una idea de Prawitz y que sucintamente es la siguiente: dado que en la Deducción Natural toda conectiva es definida a través de reglas de introducción y eliminación, se pide una especie de «principio de conservación», según el cual ninguna regla de eliminación saque del significado de una conectiva más de lo que una regla de introducción ha puesto en ella (tal como paradigmáticamente sucede para el caso de la conjunción). El SD, en tanto regla que puede verse como una forma de eliminación de una disyunción, permite inferir, a partir de la premisa $A \vee B$, la cual a su vez ha sido introducida aplicando $I\vee$ a A, y de la premisa $\neg A$, la conclusión B, con lo cual no se respetaría el Principio de Conservación. En síntesis, el Silogismo Disyuntivo permite realizar inferencias no conservadoras respecto de la regla de $I\vee$. Como caso de eliminación conservadora de la disyunción, los autores citan la regla llamada *Dilema Constructivo*, $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash C$, ya que ésta no quita en la conclusión nada que no haya sido agregado por $I \vee$ en la premisa de partida.

Por último, deseamos al menos esbozar el método de decisión de R para las implicaciones de primer grado. Comenzaremos definiendo el grado de una fórmula. Una fórmula tiene *grado 0* si

no contiene ningún signo de implicación $\twoheadrightarrow$, y una fórmula tiene *grado 1*, i. e., es una *implicación de primer grado,* si tiene la forma $A \twoheadrightarrow B$ y tanto A como B tienen grado 0. En otras palabras, una implicación es de primer grado cuando no contiene implicaciones como subfórmulas (i.e., no contiene implicaciones «anidadas»). El método es llamado por A&B, *Método de las implicaciones tautológicas* y consta de los siguientes pasos:

Primero: se define *átomo* como una fórmula que consiste en una variable proposicional o su negación. Una *conjunción primitiva* es una conjunción donde cada conyunto es un átomo y una *disyunción primitiva* es una disyunción donde cada disyunto es un átomo. Finalmente $A \twoheadrightarrow B$ es una *implicación primitiva* si A es una conjunción primitiva y B es una disyunción primitiva. Obviamente, de estas definiciones surge que para el caso en que A y B sean átomos, la implicación $A \twoheadrightarrow B$ será válida si y solo si $A = B$; y si A es una conjunción primitiva y B es una disyunción primitiva, la implicación $A \twoheadrightarrow B$ será válida si y sólo si algunos conyuntos de A son los mismos que algunos disyuntos de B. Estas reglas hacen válidas, entre otras, a las siguientes implicaciones: $A \twoheadrightarrow A$, $(A \wedge B) \twoheadrightarrow A$, $(A \wedge \neg B) \twoheadrightarrow \neg B$, $A \twoheadrightarrow (A \vee B)$, entre otras, e inválidas a las siguientes:

$$A \twoheadrightarrow B,\ A \twoheadrightarrow \neg A,\ (A \wedge \neg A) \rightarrow B,\ (A \wedge \neg A) \twoheadrightarrow (B \vee \neg B), \text{ etc.}$$

Segundo: se extiende el criterio a fórmulas implicativas $A \twoheadrightarrow B$ cuando A y B no son primitivas. Para ello se debe poner A en *forma normal disyuntiva* y B en *forma normal conjuntiva* por la vía clásica, es decir: $A_1 \wedge, \ldots \wedge A_k \twoheadrightarrow B_1 \vee, \ldots, \vee B_h$. Luego, por procedimientos en los que acuerdan R y LC, tal fórmula será válida si para cada disyunto Ai y conyunto Bj, vale la implicación primitiva $Ai \twoheadrightarrow Bj$, o sea, que hay comunidad de variables entre Ai y Bj. Para facilitar el método, se dan las siguientes reglas de procedimiento:

(i) $A \twoheadrightarrow (B \wedge C)$ es válida sii $A \twoheadrightarrow B$ y $A \twoheadrightarrow C$ son válidas y
(ii) $(A \vee B) \twoheadrightarrow C$ es válida sii $A \twoheadrightarrow C$ y $B \twoheadrightarrow C$ son válidas.

A modo de ejemplo, veamos ahora como resulta R-inválida la regla SD: $((A \vee B) \wedge \neg A) \twoheadrightarrow B$ resulta inválida en R, porque, por distributividad aplicada al antecedente y luego por regla del Reemplazo, SD se transforma en $((A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)) \twoheadrightarrow B$ y, por (ii) se reduce a $(A \wedge \neg A) \twoheadrightarrow B$ y $(B \wedge \neg A) \twoheadrightarrow B$. Pero como la primera es ECQ, y ésta es inválida en R, entonces SD también lo es.

4.2 El sistema R de lógica de la relevancia

4.2.1 La presentación de R al estilo Hilbert

Antes de pasar a la exposición del cálculo lógico R, deseamos enunciar algunas propiedades de R y que también se extienden a E, y que son esenciales en la presentación axiomática de R.

Dado que R es estable, en el sentido definido en 4.1, y debe dar cuenta de una noción de deducibilidad relevante, debe encontrarse una propiedad que represente esta característica en las fórmulas que son teoremas. La primera propiedad que exigen A&B, para R (y E), es la *Propiedad de compartir variables,* llamada también *Principio de la relevancia.* Expresaremos esta propiedad siguiendo la formulación de M. Dunn (1986):

Si A $\twoheadrightarrow$ *B es teorema de R (o E), entonces existe alguna variable sentencial* p *que aparece tanto en A como en B.*

En otras palabras, si una fórmula A es teorema en R (o E), entonces A tiene la propiedad de compartir variables. Por ejemplo son teoremas de R, las fórmulas:

$\vdash (A \twoheadrightarrow B) \twoheadrightarrow (\neg A \vee B)$
$\vdash (A \twoheadrightarrow B) \twoheadrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

Pero, si A no comparte variables, entonces A no es teorema de R. Por ejemplo, no son teoremas de R las fórmulas $(A \wedge \neg A) \twoheadrightarrow B$ y $A \twoheadrightarrow (B \vee \neg B)$. Nótese sin embargo que esta propiedad es condición necesaria para que una fórmula sea teorema de R (y E), pero no es condición suficiente, porque, por ejemplo, $A \twoheadrightarrow (B \twoheadrightarrow (A \wedge B))$ posee la propiedad de compartir variables y sin embargo no es teorema en R. Pasaremos ahora a presentar el sistema R en la formulación estilo Hilbert, en la cual, obviamente, todos los axiomas satisfacen la propiedad de comunidad de variables.

Siguiendo el estilo-Hilbert, el sistema R se construye a partir del cálculo implicacional relevante puro ($R_{\twoheadrightarrow}$)que contiene como axiomas fórmulas en las que sólo aparece la conectiva $\twoheadrightarrow$. Así, $R_{\twoheadrightarrow}$ esta formado por los siguientes axiomas esquemas:

R1 $\vdash A \twoheadrightarrow A$
R2 $\vdash (A \twoheadrightarrow B) \twoheadrightarrow ((C \twoheadrightarrow A) \twoheadrightarrow (C \twoheadrightarrow B))$
R3 $\vdash (A \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow B)) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow B)$
R4 $\vdash (A \twoheadrightarrow (B \twoheadrightarrow C)) \twoheadrightarrow (B \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow C))$

más el *Modus Ponens* como regla de inferencia $(A, A \twoheadrightarrow B \vdash B)$. A&B hacen notar que $R_{\twoheadrightarrow}$ es equivalente al *cálculo débil implicacional positivo* de Church (1951) y al *cálculo implicacional positivo* de Hilbert $H_{\twoheadrightarrow}$, por lo cual $R_{\twoheadrightarrow}$ constituye también un fragmento de la lógica intuicionista J.

Agregando a $R_{\twoheadrightarrow}$ los siguientes axiomas para la conjunción y disyunción:

R5 $\vdash (A \wedge B) \twoheadrightarrow A \,/\, (A \wedge B) \twoheadrightarrow B$
R6 $\vdash ((A \twoheadrightarrow B) \wedge (A \twoheadrightarrow C)) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow (B \wedge C))$
R7 $\vdash A \twoheadrightarrow (A \vee B) \,/\, B \twoheadrightarrow (A \vee B)$
R8 $\vdash ((A \twoheadrightarrow C) \wedge (B \twoheadrightarrow C)) \twoheadrightarrow ((A \vee B) \twoheadrightarrow C)$
R9 $\vdash (A \wedge (B \vee C) \twoheadrightarrow (A \wedge B) \vee C$

y la regla de *Adjunción*(Adj) o (*Conjunción*) $(A,B \vdash A \wedge B)$, se obtiene R+.

Los axiomas 5-8 son también axiomas clásicos. Nótese que el axioma 9, llamado en R axioma de *Distribución,* se demuestra en lógica clásica como teorema pero que, sin embargo, en R se introduce como axioma. Esta decisión ha sido tomada porque, a pesar de las dificultades deductivas que trae, para poder ser derivado como teorema, debería ser válida la falacia de la relevancia.

A fin de obtener R, se agrega a R+ la negación mediante los siguientes axiomas:

R10 $\vdash (A \twoheadrightarrow \neg A) \twoheadrightarrow \neg A$
R11 $\vdash (A \twoheadrightarrow \neg B) \twoheadrightarrow (B \twoheadrightarrow \neg A)$
R12 $\vdash \neg\neg A \twoheadrightarrow A$

Si el lector compara R con el sistema H_P de Hilbert dado en 1.3, podrá constatar que la diferencia radical entre ambos sistemas consiste precisamente en el fragmento implicacional, ya que en R no se encuentra como axioma la falacia de la relevancia y agrega, con el propósito de asegurar la relevancia, los axiomas R1, R3 y R4. Éstos, aunque redundantes en la axiomática de Hilbert para la lógica proposicional clásica, son necesarios para R porque, a causa de haber eliminado como axioma la Falacia Positiva, no pueden ser demostrados como teoremas. En particular R3 nos dice que es posible eliminar en una deducción una hipótesis introducida por Repetición, y R4 expresa que está permitido cambiar en una deducción el orden de los supuestos.

La exigencia de relevancia se traduce también en la formulación del metateorema de la deducción, cuya primer formulación fue dada por Moh y Church para $R_{\twoheadrightarrow}$, y posteriormente se extendió para R y E. Intuitivamente, el teorema de la deducción de R define una deducción de B a partir de las hipótesis $A_1, \ldots, A_n$ como relevante si y sólo si es relevante respecto de cada hipótesis A_i. Por ello se hace necesario preservar en cada paso de una deducción el número de la hipótesis de la que la fórmula dependa hasta que la

hipótesis sea cancelada. En la sección siguiente, el lector comprenderá mejor el requisito señalado.

4.2.2 Presentación de R al estilo-Gentzen (NR)

R es también formulable en estilo-Gentzen, es decir, como un sistema inferencial de deducción natural. Más aún, en el primer capítulo A&B afirman que utilizarán como base para el sistema de implicación relevante de deducción natural $NR_{\twoheadrightarrow}$, la variante de Fitch de 1952 del cálculo de deducción natural de Gentzen. En este sistema, las reglas de Gentzen para el $\twoheadrightarrow$, son formuladas con *subíndices de relevancia* y se agregan en forma explícita las reglas de *Introducción* y *Repetición* de hipótesis. Tomaremos como ejemplo de deducción relevante el teorema $\vdash A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow ((B \twoheadrightarrow C) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow C))$:

4)

1	$A \twoheadrightarrow B_{\{1\}}$	supuesto
2	$B \twoheadrightarrow C_{\{2\}}$	supuesto
3	$A \twoheadrightarrow B_{\{1\}}$	Rep. 1
4	$A_{\{3\}}$	supuesto
5	$A \twoheadrightarrow B_{\{1\}}$	Rep. 3
6	$B_{\{1,3\}}$	$E \twoheadrightarrow$ 4,5
7	$B \twoheadrightarrow C_{\{2\}}$	Rep. 2
8	$C_{\{1,2,3\}}$	$E \twoheadrightarrow$ 6,7
9	$A \twoheadrightarrow C_{\{1,2\}}$	$I \twoheadrightarrow$ 4-8
10	$(B \twoheadrightarrow C) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow C)_{\{1\}}$	$I \twoheadrightarrow$ 2-9
11	$A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow ((B \twoheadrightarrow C) \twoheadrightarrow (A \twoheadrightarrow C))$	$I \twoheadrightarrow$ 1-10

Nótese que los subíndices de relevancia indicados entre llaves indican las hipótesis o supuestos de los que depende cada paso de la deducción, los cuales sólo se puede suprimir en el caso de que la hipótesis o supuesto sea efectivamente usado y por lo tanto cancelado.

Las reglas operatorias para $NR_{\rightarrow}$ son:

$$\frac{\begin{array}{l} A_{\{k\}} \\ \vdots \\ B\,\alpha \end{array}}{A \rightarrow B\,\alpha\text{-}\{k\} \text{ si } k \in \alpha} \quad (I \twoheadrightarrow) \qquad \frac{\begin{array}{l} A \twoheadrightarrow B\,\alpha \\ A\,\beta \end{array}}{B\,\alpha \cup \beta} \quad (E \twoheadrightarrow)$$

Veremos cómo en la prueba de la Falacia Positiva, $A \vdash (B \rightarrow A)$, se viola este criterio, ya que el subíndice de relevancia de A no pertenece al subíndice de relevancia de B.

5) 1	$A_{\{1\}}$	supuesto
2	$B_{\{2\}}$	supuesto
3	$A_{\{1\}}$	Rep. 1
4	$B \rightarrow A$	$I \rightarrow$ 1, 3 $\oplus$

R+ se construye como extensión agregando las reglas operatorias correspondientes a la conjunción y a la disyunción, a saber:

$$\frac{\begin{array}{c} A\,\alpha \\ B\,\alpha \end{array}}{A \wedge B\,\alpha} \quad (I \wedge) \qquad \frac{A \wedge B\,\alpha}{A\,\alpha} \quad \frac{A \wedge B\,\alpha}{B\,\alpha} \quad (E \wedge)$$

$$\frac{A\,\alpha}{A \vee B\,\alpha} \quad (I \vee) \qquad \frac{\begin{array}{l} A \vee B\,\alpha \\ Ak \\ \vdots \\ C \\ \beta \cup \{k\} \\ Bh \\ \vdots \\ C \\ \beta \cup \{h\} \end{array}}{C\,\alpha \cup \beta} \quad (E \vee)$$

Respecto de la regla de I$\wedge$, es interesante hacer notar la razón por la cual la conjunción sólo se puede introducir si los conyuntos tienen el mismo índice de relevancia. Sucede que, de no introducirse este requisito de relevancia, se puede obtener otra forma de prueba de la Falacia Positiva, a saber:

6) 1	$A_{\{1\}}$	supuesto	
2	$B_{\{2\}}$	supuesto	
3	$A \wedge B_{\{1,2\}}$	I $\wedge$ 1,2	$\oplus$
4	$A_{\{1,2\}}$	E $\wedge$,3	
5	$B \rightarrow A_{\{1\}}$	I $\rightarrow$ 2-4	

Finalmente, **R** se obtiene agregando la Introducción de la negación (I $\neg$) y la Eliminación de la Negación (E $\neg$).

$$\frac{\begin{array}{c} A\ \{k\} \\ \vdots \\ \neg A\ \alpha \end{array}}{A \rightarrow \neg A\ \alpha\text{-}\{k\}}\ (\text{I}\ \neg) \qquad \frac{\neg\neg A\ \alpha}{A\alpha}\ (\text{E}\ \neg)$$

Pese a restar elegancia al sistema e introducir dificultades en la deducción, sucede que la regla de Distribución no es derivable en R sin hacer uso del caso irrelevante de I$\wedge$, por lo cual, se requiere agregar la regla de distribución como primitiva:

$$\frac{A \wedge (B \vee C)\ \alpha}{(A \wedge B) \vee C\ \alpha}$$

4.2.3 La semántica de R

En *Open problems concerning the System E of Entailment* (1963) y en el último parágrafo del mismo, Alan Ross Anderson plantea el problema de la semántica de E como uno de los problemas más

importantes y no definitivamente resuelto. En efecto, tanto el sistema R como el E plantean grandes dificultades tanto a nivel sintáctico como semántico. Por ello, es posible afirmar que, a diferencia de la lógica clásica y la lógica intuicionista, R y E carecen de una formulación y una interpretación estándares. Sin embargo, en la actualidad tanto R como E poseen semánticas de distinto tipo. Por un lado, están las semánticas algebraicas, tales como la formulada por Michael Dunn (1986), y por el otro, están las desarrolladas después de la semánticas de Kripke, tales como las semánticas operacionales de Fine y de Urquhart y la Semántica Relacional ideada en forma independiente por Richard Routley y Robert K. Meyer (1973). Por entender que son las de más sencilla comprensión, nos limitaremos a brindar una reseña de las últimas.

Un modelo de Routley para el sistema de lógica relevante positiva R^+, o modelo-R, estará compuesto por un conjunto K, una relación ternaria de accesibilidad $\mathfrak{R}xyz$, un elemento distinguido 0 y una función V de valuación. A diferencia de las interpretaciones de la lógica modal clásica, K no constituye un conjunto de mundos posibles, sino que puede leerse como denotando un conjunto de piezas o estados de información. A su vez, la relación $\mathfrak{R}$ debe leerse como afirmando que z contiene toda la información obtenible a partir de x e y. El elemento 0 designa al estado vacío de información o información nula y V designa a la función valuación para las fórmulas de R^+. Formalmente expresado: un modelo-R es una estructura $<K, \mathfrak{R}, 0, V>$, donde K, $\mathfrak{R}$, 0 y V son los elementos recién mencionados, tal que cumplen las siguientes condiciones:

Condición de Herencia

(H): Para toda variable proposicional p, si
$V(p,x) = 1$ y $x \leqslant y$, entonces $V(p,y) = 1$

($R \twoheadrightarrow$) $V((A \twoheadrightarrow B),x) = 1$ sii para todo $y,z \in K$, si $\mathfrak{R}\, x,y,z$
y $V(A,y) = 1$, entonces $V(B,z) = 1$.

(R∧) $V((A \wedge B),x) = 1$ sii $V(A,x) = 1$ y $V(B,x) = 1$
(R∨) $V((A \vee B),x) = 1$ sii $V(A,x) = 1$ o $V(B,x) = 1$

Nótese que H se fórmula para oraciones atómicas y que afirma que, si una proposición es verdadera en un estado x, y que si el estado x esta contenido en el estado y, entonces p sigue valiendo en y. Asimismo, la condición de verdad asignada a la conectiva ↠ dice que, para que una proposición de la forma A ↠ B sea verdadera en un estado x, se debe cumplir que para todo estado y,z, si A es verdadera en y, entonces B sea verdadera en z.

A fin de obtener una semántica completa para R, hace falta añadir una interpretación para la negación. Aunque desde el punto de vista sintáctico, R satisface en un sistema de deducción natural las mismas reglas de introducción y eliminación de la negación, en el plano semántico, presenta complicaciones adicionales. En efecto, al modelo-R debe agregarse una nueva operación unaria, *. G. Piest (2001) propone interpretar la operación * como una operación que, aplicada a un mundo o estado x, le otorga siempre un mundo o estado acompañante. Mediante esta función, es posible ahora dar las condiciones de verdad para la negación:

(R¬) $V(\neg A,x) = 1$ sii $V(A,x^*) = 0$

Intuitivamente, esta condición dice que una fórmula negada, ¬A, es verdadera en un estado de información x, si y sólo si en el estado de información acompañante x*, A es falsa. Obviamene para el caso posible en el que $x = x^*$, entonces la condición R¬ colapsa en la condición de la negación dada en la lógica clásica, i.e, es indistinguible de ella.

Por último, la validez de una fórmula se define similarmente a la clásica, o sea que una fórmula es válida si y sólo si es válida en todo modelo-R.

La semántica ideada por Urquhart en 1972 parte también de la noción de piezas de información, en tanto conjuntos (parciales) de

afirmaciones, o simplemente, informaciones. Por ejemplo, si se tiene la información *a* de que la ciudad de México tiene más habitantes que San Pablo y que San Pablo tiene más habitantes que Buenos Aires, de *a* se podrá inferir que México tiene más habitantes que Buenos Aires, en virtud de la existencia del vínculo informativo implícito de que la relación «tener más habitantes que» es transitiva. Análogamente de la información *b* de que Pedro es soltero, se podrá inferir la información de que Pedro no es casado, dado el vínculo definicional subyacente entre las propiedades ser soltero y no casado. Pero, como no siempre el vínculo informativo es tan evidente como los mencionados, tal como sucede cuando se trabaja con informaciones contingentes, se introduce una nueva conectiva, llamada *fusión* y simbolizada por el signo «$\circ$», la cual constituye la contrapartida intensional de la conjunción extensional simbolizada por $\wedge$. Así la fusión de dos informaciones *a* y *b* se escribe $a \circ b$. Transcribiendo uno de los ejemplos anteriores, se diría que, de la información de que Pedro es soltero fusionada con la información de que ser soltero significa lo mismo que ser no casado, se infiere la información de que Pedro no es casado. Aceptado que la fusión expresa el vínculo informacional entre dos dos informaciones, se da la condición de verdad para una implicación de la siguiente forma:

$$a \models A \rightarrow B \text{ sii } \forall\, b(b \models A \rightarrow a \circ b \models B)$$

Lo realmente interesante es que esta idea de una conjunción más fuerte, o fusión, además de expresar el vínculo entre dos informaciones relevantes, permite también elucidar el sentido de la indexación en las premisas utilizadas exigida por la relación de deducibilidad relevante. Por ejemplo, en la conclusión del ejemplo 4), $A \twoheadrightarrow C_{\{1,2\}}$, los subíndices entre llaves indican que $A \twoheadrightarrow C$ depende de la fusión entre los supuestos 1 y 2, o sea de la fusión de la información entre $A \twoheadrightarrow B$ y $B \twoheadrightarrow C$.

4.3 La noción de consecuencia lógica de R

Ya hemos dicho que A&B presentan la implicación relevante como conversa de la relación de deducibilidad y por ello, las condiciones de relevancia impuestas a la deducción conciernen a la implicación relevante en tanto relación de consecuencia lógica. Puesto que R es una extensión de cualquiera de sus fragmentos, a fin de comparar la relación de consecuencia lógica de R con la clásica, basta por ahora con determinar la noción de consecuencia lógica para el fragmento implicacional $R_{\rightarrow}$. Nótese que si los axiomas R10 y R11 se agregan al cálculo positivo de Hilbert (H_{+}) se obtiene todo el cálculo proposicional intuicionista J, ya que el axioma R12 no es lógicamente válido en J.

Si un sistema lógico es un sistema relevante, i.e., equivalente al menos al fragmento $R_{\rightarrow}$, entonces en tal sistema no podría resultar teorema la Falacia Positiva, $A \rightarrow (B \rightarrow A)$. De ahí que se pida que la operación de consecuencia lógica no valide en el metalenguaje la prueba de dicha falacia.

Analizaremos esta cuestión desde el marco de la Lógica de Secuencias de Gentzen, puesto que, como ya dijimos, la principal virtud del cálculo de secuencias SC es reflejar en el lenguaje objeto de la lógica de secuencias las propiedades de la deducibilidad. Recuérdese además, que toda derivación en el cálculo de secuencias puede verse como una descripción de cómo es una derivación en el cálculo de deducción natural. R. Kripke (1959) dio un sistema para el fragmento implicacional de R, que denominaremos $SR_{\rightarrow}$, basado en lógica de secuentes, similar al de Gentzen para LC, pero que difiere de éste en los siguientes aspectos:

(i) $SR_{\rightarrow}$ sólo contiene reglas operacionales para la implicación;

(ii) En $SR_{\rightarrow}$ valen las reglas estructurales Permutación y Contracción pero se restringen los secuentes a los que tienen sólo una fórmula en el postsecuente; y

(iii) Carece de la regla estructural de *Atenuación en el prosecuente*, a saber:

$$\frac{A \dashv B}{C, A \dashv B} \qquad (A\dashv)$$

La restricción a un solo postsecuente es, en cierta media, trivial, ya que por (iii) hay sólo una fórmula en el prosecuente y, sin los signos $\wedge$ y $\vee$, carece de sentido poner más de una fórmula en el postsecuente. La diferencia importante es, sin duda alguna, la ausencia de A⊣, la cual está justificada porque, si se la incluye, se hace inmediatamente válida la falacia de la relevancia, tal como se ve en la prueba clásica dada en 2.5, 7). De esto se desprende que la noción de consecuencia lógica de $R_{\twoheadrightarrow}$ difiere estructuralmente de la clásica. Veamos ahora qué sucede con el fragmento $SR_{\twoheadrightarrow\neg}$, o sea el fragmento implicacional con negación. Para ello, se sigue un camino similar al de Gentzen para acomodar la negación a la lógica clásica, de la siguiente forma:

(i) se permite más de un postsecuente;

(ii) se agregan las reglas de Contracción y Permutación en el postsecuente;

(iii) a fin de preservar el Principio de relevancia, se reformulan las reglas del condicional de la siguiente manera:

$$(\twoheadrightarrow\dashv) \quad \frac{\Gamma \dashv A,\phi \qquad \Omega,B \dashv \psi}{\Gamma, \Omega, A \twoheadrightarrow B,\phi,\psi} \qquad \frac{\Gamma, A \dashv \Omega}{\Gamma \dashv A \twoheadrightarrow B, \Omega} \quad (\dashv\twoheadrightarrow)$$

Donde en ($\dashv\twoheadrightarrow$), Ω debe ser una secuencia vacía, y Γ debe ser una secuencia de fórmulas que contengan solamente la conectiva $\twoheadrightarrow$; y

(iv) se dan las reglas para la negación en la forma estándar:

$$(\neg\dashv) \quad \frac{\Gamma, A \dashv \Omega}{\Gamma \dashv A \neg B, \Omega} \qquad \frac{\Gamma, A \dashv \Omega}{\Gamma \dashv A \neg B, \Omega} \quad (\dashv\neg)$$

En el ejemplo siguiente mostraremos que la restante paradoja del condicional material, a saber: $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ es inválida porque su demostración clásica no respeta la restricción impuesta a la regla $\dashv \twoheadrightarrow$.

7)
$$\begin{array}{lll}
\underline{A \dashv A} & \text{Ax.} & \\
\underline{A \dashv A, B} & \dashv A & \\
\underline{A \dashv B, A} & \dashv P & \\
\underline{\dashv A \rightarrow B, A} & \dashv \rightarrow & \oplus \\
\underline{\neg A \dashv A \rightarrow B} & \neg \dashv & \\
\dashv \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) & \dashv \rightarrow &
\end{array}$$

El fragmento implicacional-conjuntivo $R\twoheadrightarrow\wedge$ fue dado por Meyer en 1966 y se basó en la idea de agregar a $SR\twoheadrightarrow$ las reglas de Gentzen para la introducción de $\wedge$ en el postsecuente y en el prosecuente, en su forma estándar, pero con las restricciones impuestas al subíndice de relevancia, tal como se mostró en el ejemplo 6). Es decir que $R \twoheadrightarrow\wedge$, se obtiene agregando a $R \twoheadrightarrow$ las siguientes dos reglas:

$$\frac{\Gamma, A \dashv C}{\Gamma, A \wedge B \dashv C} \quad \frac{\Gamma, B \dashv C}{\Gamma, A \wedge B \dashv C} \qquad (\wedge \dashv)$$

$$\frac{\Gamma \dashv A \qquad \Gamma \dashv B}{\Gamma \dashv A \wedge B} \qquad (\dashv \twoheadrightarrow)$$

Sin embargo, en R es válida la regla Refuerzo del Antecedente (RA), «prima hermana» de la Falacia Positiva, a saber: $(A\twoheadrightarrow B)\twoheadrightarrow ((A \wedge C)\twoheadrightarrow B)$. La importancia de esta regla reside en que ella refleja en el lenguaje objeto la propiedad de monotonía de la relación de consecuencia. Por ello, si un sistema lógico carece de tal propiedad, se dice que su noción de consecuencia es no-monótona, tal como sucede en ciertas lógicas condicionales y en general, en las lógicas no-monótonas, originadas en las ciencias de la computa-

ción. A fin de que RA sea válida en el sistema R, se permite un cierto tipo de Atenuación en el antecedente, que se manifiesta en la formulación de la regla $\wedge\dashv$, tal como se muestra a continuación:

$$(A\dashv)\quad \frac{A[B]\dashv A}{A[B,C]\dashv A}\quad \text{Siempre que } B \neq \emptyset$$

La cual permite probar la regla Refuerzo del Antecedente.

$$8)\quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A\dashv A \qquad\qquad B\dashv B}{A, A \twoheadrightarrow B\dashv B}\ \twoheadrightarrow\dashv}{A\twoheadrightarrow B, A\dashv B}\ P\dashv}{A\twoheadrightarrow B, A\wedge C\dashv B}\ \wedge\dashv}{A\twoheadrightarrow B\dashv (A\wedge C)\twoheadrightarrow B}\ \twoheadrightarrow\dashv}{\dashv (A\twoheadrightarrow B)\twoheadrightarrow((A\wedge C)\twoheadrightarrow B)}\ \twoheadrightarrow\dashv \qquad \text{Ax.}$$

Sin embargo R (y E), deparan todavía un problema, el cual, ya en el artículo citado de 1963, fue caracterizado por A&B como problema abierto. En efecto, en la formulación al estilo Hilbert, R tiene como regla de inferencia, además de la Adjunción, al *Modus Ponens.* Por ello, si se quiere que la versión al estilo Gentzen de R sea equivalente a la de Hilbert, se hace necesario aceptar la regla de *Eliminación* o *Corte*, ya que, como lo mostramos en el capítulo 2.5, el *Modus Ponens* en un caso de ella. Por otra parte, el sistema de implicación fuerte (*Strenge Implikation*) de Ackermann de 1956, inspirador de los trabajos de A&B, tenía tres reglas para la implicación, donde la tercera tenía la forma:

$$\frac{A, \neg A \vee B}{B}\ (\gamma)$$

Se constata fácilmente que γ no es otra cosa que el *Modus Ponens* para el condicional material escrito en términos de disyunción y negación. Pero a su vez, reemplazando en la regla *Gamma*, A por $\neg$A

y viceversa, se obtiene el Silogismo Disyuntivo $A \vee B, \neg A \vdash B$. Luego el problema consiste en cómo hacer para, por un lado, aceptar la regla *Gamma* y, por el otro, rechazar SD, cuando en realidad, si se acepta la regla de Reemplazo, se trata de fórmulas equivalentes. Este problema se conoce en la literatura como *admisibilidad de gamma* y su solución consistió en considerar a la regla *Gamma* como una regla «admisible» en R(y E), i.e., que no aumenta el número de teoremas ni de R ni de E, en forma análoga a la regla de Necesitación de los sistema de C. I. Lewis respecto de la lógica clásica LC, (cfr. 2.3.1). Sin embargo, esta solución no parece evitar la paradójica situación resultante de aceptar tal admisibilidad y al mismo tiempo rechazar el SD. Tal vez sea por este motivo que todavía se tienda a considerar la admisibilidad de la regla *Gamma* como un problema abierto. Más aún, Wojcicki (1984, p.30) presenta un caso de inferencia que constituye una buena razón para indicar la presencia de otros problemas aún pendientes en los cálculos relevantes, a saber: en R, la formula $A \twoheadrightarrow A$ es teorema y también lo es la regla $A \twoheadrightarrow A \vdash B \twoheadrightarrow B$ (porque preserva la teoremicidad), sin embargo viola ostensiblemente el Principio de Relevancia y, por lo tanto, no podría constituir una genuina regla de R.

De las características deductivas de R se desprende que la noción de consecuencia de R es más débil que la noción de consecuencia de LC. En efecto, dado que la base deductiva de R, Q_R está formada por los axiomas R1-12, más *Modus Ponens* y Adjunción y ésta es más débil que la base deductiva de LC, entonces el conjunto de inferencias válidas de R también resultará menor que el conjunto de inferencias válidas de LC. Tal como lo hemos mostrado, R (y E) carecen de ciertas reglas de inferencia clásicas, como la Paradoja Positiva y el Silogismo Disyuntivo, entre otras y por ello, R no es una lógica estructuralmente completa, i.e., hay inferencias que preservan las consecuencias del vacío, $Cn(\emptyset)$, que no son válidas en R. Además, tal como ya lo mostramos, R carece de Atenuación en el prosecuente e impone ciertas restricciones a otras reglas estructurales, por lo cual es una lógica subestructural.

Lo afirmado hasta el presente acerca de R puede inducir a pensar que hay un sentido en el cual LC podría verse como una extensión de R. En efecto, si a los signos primitivos de R se agrega un nuevo signo, el condicional material, el lenguaje de R queda incluido propiamente en el lenguaje de LC y las bases inferenciales Q_R y Q_{LC} sólo difieren en las fórmulas que contienen el signo propio de LC. Así, la Falacia Positiva $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ sería LC-válida pero R-inválida, mientras que $A \rightarrow A \vee B$, sería R-válida y también LC-válida. Además, puesto que en R son válidas las siguientes inferencias: $A \twoheadrightarrow B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$ y $A \twoheadrightarrow B \vdash \neg A \vee B$, entonces de toda implicación relevante tautológica se deduciría la respectiva validez del condicional material, formulado en términos de la negación y la disyunción, o la negación y la conjunción. En este caso, resulta obvio que LC sería una extensión de R, y entonces podría verse a R como el fragmento de LC constituido precisamente por aquellos teoremas que son teoremas de R y también de LC, ya que todo teorema de R es teorema de LC, pero no viceversa. En sentido opuesto, también sería posible ver a R como una extensión de LC, en el sentido de que R agrega el signo $\twoheadrightarrow$ para representar una nueva conectiva, la implicación relevante, la cual no satisface las mismas reglas de inferencia que LC.

Siguiendo esta línea de argumentación, hay un teorema, demostrado por A&B (1959), por el cual es posible interpretar la lógica proposicional clásica LC como un fragmento de R (o de E) y obtenerse de esta manera un resultado similar al que obtuviera Gödel en 1932 para la lógica intuicionista (cfr. 3.2.3). Dicho teorema afirma: *Las fórmulas de grado-cero (i.e., aquellas que contienen sólo las constantes lógicas $\wedge$, $\vee$ y $\neg$), que son probables en R (o E), son precisamente los teoremas de la lógica clásica.* En otras palabras, R y LC contienen los mismos teoremas respecto del conjunto de constantes lógicas $\wedge$, $\vee$ y $\neg$.

Pero, como ya lo hemos dicho, un sistema puede coincidir en el conjunto de sus teoremas pero diferir en el conjunto de sus inferencias válidas y tal es lo que sucede con R (y E), ya que R (y E) ca-

recen, al menos, del Silogismo Disyuntivo. Luego, aunque es técnicamente posible ver a R como una extensión de LC o viceversa, desde el punto de vista estrictamente lógico y filosófico R es un sistema divergente de la lógica clásica LC.

4.4 Otros sistemas de lógica de la relevancia

Como ya anticipamos, los sistemas de lógica relevante componen una familia de sistemas. En el mismo libro, A&B presentan sistemas «vecinos» de R y E. Uno de ellos, el llamado «*ticket entailment*» (T), es un subsistema de E y los sistemas restantes se agrupan bajo el nombre de *mingle systems,* los cuales se obtienen a partir de R y E agregando el axioma $A \rightarrow (A \rightarrow A)$. Pero, la introducción de este axioma permite derivar como teorema la fórmula $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$, la cual a su vez posibilita reproducir las paradojas de la implicación material. De ahí que estos sistemas sean considerados semi-relevantes. Asimismo, G. Priest y G. Restall han propuesto sistemas relevantes más débiles que R. En el segundo volumen de *Entailment* (1992) los autores extienden el requisito de relevancia a la lógica de predicados, a partir de la teoría de M. Dunn sobre la predicación relevante. También R. Mayer (1992) dio una variante de la aritmética de Peano basada en lógica de la relevancia, pero que lamentablemente no contiene todos los teoremas de la aritmética clásica. También existen aplicaciones a la teoría de conjuntos, a la lógica modal deóntica y a la lógica condicional, tal como lo hace G. Priest (2001). Más aún, hay sistemas de lógica intuicionista relevante como el propuesto por Neil Tennant (1999). Finalmente, deseamos mencionar, dado su motivación estrictamente filosófica, el sistema (PAI) de W. Parry (1933), conocido bajo el nombre de *implicación analítica* (*analytische implikation*). En efecto, Parry intentó formalizar la noción de implicación analítica, con el propósito explícito de dar cuenta de la noción de analiticidad de Kant involucrada en su definición de juicio analítico como aquel juicio

en el cual el contenido (significativo) del predicado está incluido en el contenido (significativo) del sujeto. Esto lo llevó necesariamente a rechazar tanto las paradojas de la implicación material como las paradojas del condicional estricto de los sistemas modales y a cualquier otra fórmula cuyo consecuente no estuviera «contenido» de alguna manera en el antecedente, tales como $A \rightarrow (A \vee B)$ (es decir, Adición) y $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$. A&B (1975, pp. 430-33) reformulan el sistema de Parry bajo el estilo Hilbert y señalan que este sistema tiene muchas cuestiones abiertas sin responder. A nuestro propósito sólo interesa reproducir el teorema de la deducción, a saber: Si $A \rightarrow B$ es probable en PAI, entonces todas las variables que aparecen en B deben aparecer en A. Similarmente al sistema R de A&B, en el sistema PAI de Parry resultan inferencias inválidas las paradojas de la implicación estricta y *Ex falso sequitur quodlibet.* Sin embargo, ahora resulta inválida regla de Adición y válida la regla del Silogismo Disyuntivo. Más aún, resultan también teoremas, implicaciones muy alejadas de la idea de implicación analítica que se pretende formalizar, como, por ejemplo las fórmulas, llamadas *Paradojas de la implicación analítica,* a saber: $((B \wedge \neg B) \wedge C) \rightarrow_A \neg C$ y $((B \wedge \neg B) \wedge C) \rightarrow_A (C \wedge \neg C)$. Aunque nosotros no contemos con información acerca de tratamientos en lógica de secuentes de la noción de consecuencia analítica, es posible que en ella la regla de atenuación en el postsecuente ($\dashv A$) no valga en forma irrestricta, ya que si lo fuera, resultaría válida la Adición. Asimismo, para que resulte válida en PAI la implicación analítica $((B \wedge \neg B) \wedge C) \rightarrow_A (C \wedge \neg C)$, debería permitirse cierto tipo de atenuación en el prosecuente en el fragmento de PAI con $\neg$, $\rightarrow$ y $\wedge$. La comprobación de estos resultados se dejan a cargo del lector.

Finalmente, el lector ya habrá descubierto que, cualquiera sea el sistema de lógica relevante a considerar, éste será un sistema divergente de la lógica clásica según el caso 2.

4.5 Comentarios marginales: sobre la relevancia significativa de los condicionales contingentes

Una de las cualidades esgrimidas por A&B a favor del sistema R, (cfr. 4.1) consistió en sostener que en R era posible expresar condicionales contingentes en los cuales se pidiera una relación «significativa» entre antecedente y consecuente. Es sabido que una proposición es contingente cuando es posible que sea verdadera o falsa. Sin embargo, hay condicionales contingentes y significativamente relevantes, como por ejemplo, *Si hoy es lunes entonces mañana es martes,* sobre los cuales R no puede decidir si son verdaderos o no lo son. Esto es así porque, en R, la significatividad está representada por el Principio de Comunidad de Variables entre antecedente y consecuente y, por ello, ninguna proposición condicional de la forma *si p entonces q* será teorema en R, pese a que sus ejemplos de sustitución resulten condicionales contingentes verdaderos. Contrariamente a la aspiración de A&B, ni en R ni en E es posible dar cuenta de la relación significativa entre antecedente y consecuente de condicionales cuando ellos están constituidos por proposiciones atómicas distintas, aun cuando en el lenguaje natural sean condicionales significativamente relevantes. Obviamente, para dar cuenta de este tipo de condicionales, habría que descomponer el significado tanto del antecedente como del consecuente. En el tomo II del *Entailment,* aparecido recién en 1992 y escrito, además, junto con J. Michael Dunn, se extiende el sistema R y E a la lógica de predicados, dentro de la cual se pude expresar la interesante noción de *predicación relevante* (1992, 74.6). Tomando un objeto arbitrario, por ejemplo, una rosa (r), una propiedad relevante para ella, como la de *poseer un delicado perfume* (P), se formalizaría:

(1) $Pr \leftrightarrow \forall x(x = r \rightarrow Px)$

Ahora bien, sea la proposición condicional:

(2) *Si esta es una rosa entonces posee un delicado perfume*

Evidentemente, si evaluamos (2), teniendo en cuenta la información consignada en (1), (2) resulta un condicional relevante, aún desde el punto de vista sintáctico, ya que, bajo el supuesto de que *a* es una rosa, (1) permite inferir que *a* tiene delicado perfume. Pero, nótese que la relevancia de (2) depende de lo afirmado en (1) y que (1) no es un principio lógico, sino solamente una información de índole pragmática, o sea que la relevancia de la inferencia en casos como el dado no se resuelve acudiendo a principios de relevancia formales. El hecho de que a los efectos de validar una inferencia sea necesario incorporar presuposiciones o cualquier otro tipo de elementos pragmáticos no es ninguna novedad en lógica, ya que el mismo Carnap lo había hecho notar cuando incorporó los *postulados de significación* (1946) para poder, por ejemplo, inferir la conclusión *Juan es más alto que María*, agregando a las premisas *Juan es más alto que Pedro* y *Pedro es más alto que María* el postulado de significación que informe que la relación *más alto que* es transitiva. Nótese también que este recurso es similar al que se acude con la noción de vínculo informativo y la conectiva intensional fusión (°) incorporadas a la semántica de R precisamente para preservar la relevancia «significativa» en el caso de informaciones contingentes (cfr. 4.2.3).

La psicología cognitiva no ha sido ajena al enfoque relevante de la lógica y, a las múltiples investigaciones psicológicas acerca del razonamiento deductivo, se han sumado estudios que intentan elucidar la relación de implicación significativa propia del lenguaje común, a partir de los sistemas de A&B, como por ejemplo las investigaciones de R. B. Ricco y G. Piérault-Le Bonniec (1990). De todas formas, sostenemos la opinión de que estos trabajos no han arrojado resultados importantes, precisamente a causa de la noción misma de relevancia lógica involucrada en los sistemas de A&B. Como ya lo mostramos, la idea de implicación relevante dada por A&B lo único que intenta evitar es que una proposi-

ción verdadera sea derivada de cualquier proposición y que una contradicción implique cualquier proposición, lo cual es mucho menos que exigir alguna comunidad efectiva de significados entre antecedente y consecuente en las oraciones condicionales, tal como lo exige el lenguaje natural.

Lecturas sugeridas

Para completar los temas tratados en este capítulo, es ineludible acudir al mismo libro de A&B, al cual hemos hecho referencia reiteradamente. Para una exposición técnica de la lógica de la relevancia en español remitimos al trabajo de José Méndez, titulado Lógica de la relevancia, en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*, tomo 7. Un análisis filosófico exhaustivo de los argumentos de la lógica de la relevancia se encuentra en el libro de Raúl Orayen, *Lógica, significado y ontología* (1989). Una excelente y sintética exposición de los aspectos centrales de la lógica de la relevancia, se encuentra en el trabajo de Edwin D. Mares, Relevance Logic, en A *Companion to Philosophical Logic* (2002). Para una exposición formal de los sistemas R y E, tanto semántica como en teoría de prueba, se recomienda el excelente trabajo de M. Dunn, Relevance Logic and Entailment, en *Handbook of Philosophical Logic*, vol. III, ya citado (reeditado en colaboración con G.Restall en el volumen 6 de la nueva edición del *Handbook*, 2002). Una presentación original de la lógica de la relevancia se encuentra en el ya mencionado libro de G. Priest, *Non-classical logic.* Para una presentación filosófica y técnicamente sencilla para una cierta clase de lógicas relevantes se sugiere el libro de S. Read, *Relevant Logic* (1988). Para un enfoque semántico de la lógica de la relevancia y específicamente de la negación, se sugiere el trabajo de G.Restall, Negation in Relevance Logic, incluido en el libro ya mencionado *What is Negation?*

5
Las lógicas plurivalentes y la crítica a la semántica clásica

5.1 Las críticas a la bivalencia de la lógica clásica

Los sistemas de lógica que analizaremos en el presente capítulo se originan en argumentos estrictamente filosóficos en contra de la bivalencia de la lógica clásica y sin tener en cuenta los aspectos sintácticos de la relación de deducibilidad clásica. Las lógicas plurivalentes, también multivalentes o multivaluadas, según el gusto, constituyen hoy en día una extensa familia de sistemas lógicos divergentes de la lógica clásica.

Las primeras observaciones a la bivalencia de la lógica clásica se deben a Aristóteles mismo. Es ya conocido el análisis que Aristóteles hace en el capítulo 9 de *De Interpretatione* acerca de los valores de verdad que pueden adquirir los enunciados acerca del futuro, o sea, los llamados *futuros contingentes.* Dada la proposición *Mañana habrá una batalla naval,* Aristóteles se pregunta qué valor de verdad tiene hoy ese enunciado, ya que mañana puede suceder que haya o que no haya una batalla naval. Generalizando, la clave de su argumentación se resume en el siguiente dilema: o bien los enunciados acerca del futuro tienen más de un valor de verdad y, entonces, debe abandonarse el Principio de Bivalencia (PBV) y consecuentemente el Principio del Tercero Excluido, o bien se acepta que los futuros contingentes también se comportan de acuerdo al PBV, con el consecuente peligro de caer en el determinismo o en el fatalismo. Los lógicos postaristotélicos se dividieron respecto de esta problemática: por un lado, los epicúreos, aunque no originaron tradición lógica alguna, rechazaron el PBV en defensa del indeterminismo y se declararon a favor de la plurivalencia,

mientras que los estoicos, precisamente por ser deterministas estrictos, lo defendieron. Más aún, los estoicos fijaron según este principio el significado de las conectivas lógicas, en particular el significado del condicional material y sus reglas características. El problema del valor de verdad de los futuros contingentes también ocupó a grandes lógicos medievales como Duns Escoto y Guillermo de Ockham. Es precisamente a este último a quien se le atribuye la distinción entre los valores *propositio neutra, propositio vera* y *propositio falsa.* Sin embargo, se acuerda en que la lógica plurivalente surgió recién con Scotsman H. Mac Coll (1837-1909), Charles S. Peirce (1839-1914) y Nikolai A. Vasiliev (1880-1940); los dos últimos por proponer precisamente una respuesta alternativa no bivalente a la problemática tradicional de los futuros contingentes. Pese a ello, la época sistemática de las lógicas plurivalentes se inicia con los trabajos de Jan Łukasiewicz On three valued logic, de 1920, y On deteminism, de 1922.

Tal como surge del artículo de Łukasiewicz On Determinism, de 1970, las motivaciones de sus sistemas plurivalentes no fueron de índole matemática sino que más bien surgieron de una crítica a los esquemas «rígidos» de pensamiento que imponía la bivalencia involucrada tanto en la lógica aristotélica como en la geometría euclidiana. En efecto, en su primer sistema trivalente Ł3, Łukasiewicz propone flexibilizar la lógica clásica mediante un tercer valor de verdad concebido como «lo posible» (o «lo indeterminado»), en el sentido de que un enunciado sobre el futuro no puede ser determinado en el presente ni como verdadero ni como falso, sino como no necesario, i.e., posible. Ahora bien, en la lógica bivalente no es posible dar a los operadores modales un tratamiento veritativo funcional, porque en ella colapsan la verdad, la posibilidad y la necesidad. En otras palabras, si p tiene el valor 1, también lo tienen $\Diamond p$ y $\Box p$; y si p tiene valor 0, también lo tienen $\Diamond p$ y $\Box p$. De ahí que Nicholas Rescher (1969) sostenga que otra gran motivación de Ł ukasiewicz para la construcción de su sistema Ł3 fue la posibilidad de ofrecer un tratamiento veritativo funcional de los operadores modales en una lógica trivalente.

Dada la cantidad de sistemas plurivalentes existentes en la literatura lógica, hemos tomado una decisión análoga a la asumida en relación con el sistema R de lógica de la relevancia y, por ello, nos dedicaremos a analizar sólo los sistemas de Łukasiewicz, por considerarlos paradigmáticos respecto de la familia de lógicas multivaluadas. Pasaremos ahora a presentar el sistema de Łukasiewicz Ł3 para la lógica proposicional.

5. 2 Los sistemas de Łukasiewicz

5.2.1 Los sistemas finitos Ł3 y Łn de Łukasiewicz

El sistema Ł3 tiene como conectivas primitivas el condicional → y la negación ¬, caracterizadas por las siguientes tablas: donde # representa el tercer valor:

A \ B	A → B: 1	#	0
1	1	#	0
#	1	1	#
0	1	1	1

A	¬A
1	0
#	#
0	1

Respecto de la tabla para el condicional, A. Urquhart (1986) desarrolla una interesante conjetura acerca de por qué Łukasiewicz decidió que el valor de # → # sea 1 y no # que pasaremos a sintetizar. En primer lugar, propone entender los tres valores que representan los valores que una proposición puede tomar en el futuro, i.e., 1, # y 0 como conjuntos de los valores estándares V y F, o sea : 1 = {V}, 0 = {F} y # = {V,F}.

Según Urquhart, la tabla para el condicional debe haberle suscitado a Łukasiewicz serias dudas respecto del caso en el que el antecedente y consecuente tuvieran el tercer valor. En efecto, dada la siguiente tabla:

B \ A	{V}	{VF}	{F}
		1	#
{V}	{V}	{VF}	{F}
{VF}	{V}	¿?	{VF}
{F}	{V}	{V}	{V}

¿qué valor asignarle al caso {VF} → {VF}? Contrariamente a lo que se supone asignaría el sentido común, Łukasiewicz asigna al lugar indicado por ¿? el valor 1, i.e., {V} en lugar de {VF}. La razón a esta decisión es que, según Urquhart, Łukasiewicz quiere que la fórmula A → A sea una tautología trivalente, es decir, que su valor sea 1 bajo cualquier valuación, y la única forma de asegurar esta propiedad es precisamente que se asigne {V} al condicional cuando el valor de sus componentes atómicos sea {VF}. Las explicación de Urquhart es que Łukasiewicz aceptó de hecho, pese a su oposición a la lógica clásica, dos supuestos esenciales de ella, a saber: (i) que todo sistema lógico debe ser expresado en forma axiomática, o sea al estilo Hilbert, y (ii) que toda conectiva es una función de verdad de sus componentes atómicos, i.e., que toda conectiva debe ser extensional. A partir de estos supuestos Urquhart sostiene que es posible mostrar que el valor asignado al lugar ¿? de la tabla es forzado. En efecto, dada una proposición de la forma A → B, ésta debería adquirir {V} sólo si A y B expresan la misma proposición, sin importar si A y B tienen, o no, el valor {VF}. Si esta condición no vale, entonces de ello no se sigue que la asignación al lugar ¿? sea {V}, sino que más bien habría que poner el valor {VF}. Pero, en este caso, la tabla del condicional → no arrojaría como resultado la tautologicidad de A → A. Y, si se optara por ello, entonces el condicional no sería una conectiva extensional y Ł3 no sería un sistema lógico veritativo funcional. Luego, según Urquhart, Łukasiewicz no tenía otra opción que asignar 1 a una proposición condicional cuando sus componentes atómicos tuvieran el valor #.

A partir del condicional y la negación, las restantes conectivas son definidas de la siguiente manera:

Def. 1 $A \vee B =_{df} (A \rightarrow B) \rightarrow B$
Def. 2 $A \wedge B =_{df} \neg(\neg A \vee \neg B)$
Def. 3 $A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

De tales definiciones surgen las tablas de las restantes conectivas, a saber:

	$A \wedge B$			$A \vee B$			$A \rightarrow B$		
A \ B	1	#	0	1	#	0	1	#	0
1	1	#	0	1	1	1	1	#	0
#	#	#	0	1	#	#	1	1	#
0	0	0	0	1	#	0	1	1	1

Si no se toman en cuenta las asignaciones y los resultados que involucran el tercer valor #, se ve claramente que las restantes valuaciones arrojan para las conectivas los mismos valores que en la lógica clásica. Ahora bien, a fin de determinar el conjunto de las tautologías trivalentes, en toda lógica plurivalente se elige un valor, comúnmente llamado valor *designado* (o *distinguido*), que cumple en los sistemas plurivalentes el mismo rol que el valor 1 en la lógica clásica, o sea que es el elegido como preservativo de la verdad y para determinar la validez. Usualmente las tablas de cada conectiva reciben el nombre de *matrices* y el conjunto de las matrices de las conectivas del sistema constituye la *matriz* lógica característica del mismo. Como caso particular, el conjunto de las matrices que define las conectivas en Ł3 constituyen la matriz característica de Ł3, i.e., $M_{Ł3}$. Debe observarse que la matriz característica de la lógica clásica constituye una submatriz de $M_{Ł3}$. De esta forma, cada sistema multivalente es representado por una única matriz. Retomaremos este punto en 5.3.

A fin de determinar si una fórmula cualquiera A es una tautología trivalente, se procede de la misma forma que en lógica clásica y, puesto que el valor designado en Ł3 es el valor 1, si la valuación

de la fórmula es 1 cualquiera sea la valuación de sus fórmulas atómicas, entonces la fórmula es una tautología. Mostraremos ahora que la Paradoja Positiva de la implicación material es una Ł-tautología.

1)

A	→	(B	→	A)
1	1	1	1	1
#	1	1	#	#
0	1	1	0	0
1	1	#	1	1
#	1	#	1	#
0	1	#	#	0
1	1	0	1	1
#	1	0	1	#
0	1	0	1	0

En realidad, toda tautología trivalente también es una tautología bivalente, pero no vale la afirmación recíproca, pues puede haber tautologías bivalentes que no sean Ł3-tautologías. Ejemplo de estas últimas son:

a. $\nvDash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ *Ley de Peirce*
b. $\nvDash \neg(A \wedge \neg A)$ *Principio de No Contradicción*
c. $\nvDash A \vee \neg A$ *Principio del Tercero Excluido*
d. $\nvDash ((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ *Ley del Modus Ponens*

La invalidez del PTE y del PNC era imaginable, dado que se trata de una lógica de más de un valor de verdad. Por el contrario, seguramente no era esperable que la ley *Modus Ponens* no resultara una Ł3-tautología, por lo cual pasaremos a mostrar su no tautologicidad:

2)

((A	→	B)	∧	A)	→	B
1	1	1	1	1	1	1
#	1	1	#	#	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	#	#	#	1	1	#
#	1	#	#	#	1	#
0	1	#	0	0	1	#
1	0	0	0	1	1	0
#	#	0	#	#	#	0
0	1	0	0	0	1	0

Si bien esta fórmula no es una tautología porque no preserva el valor designado, se considera una *cuasi-tautología* porque en ningún caso ha adquirido el valor 0. Más aún, si una fórmula A nunca asume el valor 0 en Ł3, tampoco lo asumirá en LC y por lo tanto A es una tautología clásica; tal el caso de las cuatro fórmulas a-d, que nunca toman el valor 0. Luego, el conjunto de las Ł3-tautologías está incluido en el conjunto de las tautologías clásicas. Formalmente : {Ł3-tautologías} ⊂ {LC-Tautologías}.

Podría suponerse que, si se redefiniera el concepto de tautología afirmando que un enunciado es una tautología cuando asume los valores 1 o # (i.e.,nunca asume 0), como es el caso de las LC-tautologías a-d, entonces el conjunto de las Ł3-tautologías coincidiría con el conjunto de las LC-tautologías. Sin embargo, como lo hace notar Rescher, esta suposición es errónea porque la fórmula ¬(A → ¬A) ∨ ¬(¬A → A), que es una LC-tautología, en Ł3 toma el valor 0 cuando A toma el valor #.

Rescher hace notar también otra característica interesante de Ł3 que consiste en que para toda fórmula A de Ł3 que involucra sólo ¬, ∧ y ∨, la valuación V(A) = # sii para toda variable α que ocurre en A, V(α) = #. De esto resulta que ninguna de tales fórmulas puede resultar una LC-contradicción, i.e., que siempre asuma el valor 0; esto es así aun para la fórmula A ∧ ¬A, ya que ésta toma el valor # cuando V(A) = V(¬A) = #. Y lo mismo para el PNC, ya

que también toma el valor # cuando V(A ∧ ¬A) = #, tal como se muestra en la tabla correspondiente:

3)

¬	(A	∧	¬A)
1	0	0	1
#	#	#	#
1	0	0	1

Entre las tautologías más comunes son teoremas de Ł3 las siguientes:

a. ⊢ A → (B → A) *Paradoja Positiva*
b. ⊢ ¬A → (A → B) *Paradoja Negativa*
c. ⊢ (A → B) → ((A ∧ C) → B) *Refuerzo del Antecedente*
d. ⊢ ((A → B) ∧ (B → C)) → (A → C) *Silogismo Hipotético*
e. ⊢ (A → B) → (¬B → ¬A) *Contraposición*

Por el contrario, no son tautologías las siguientes fórmulas:

f. ⊭ A ∨ ¬A *PTE*
g. ⊭ B → (A ∨ ¬A) *Paradojas de la*
h. ⊭ (A ∧ ¬A) → B *implicación estricta*

Para probar la invalidez, se procede a buscar una valuación que no preserve el elemento designado, i.e., el 1. Por ejemplo,
V((A ∧ ¬A) → B) = # cuando V(A) = # y la V(B) = 0 y
V(B → (A ∨ ¬A)) = # si V(B) = 1 y V(A ∨ ¬A) = #.

En general, los sistemas multivalentes no se presentan ni al estilo Hilbert ni al estilo Gentzen. Lo más común es presentarlos algebraicamente, ya que hoy en día se acuerda en que las lógicas plurivalentes son una rama de la lógica algebraica. Sin embargo, el conjunto de tautologías del sistema Ł3 de Łukasiewicz fue axiomatizado por M. Wajsberg en 1931, mediante la siguiente lista de axiomas (Urquhart, 1986, p 83):

Ł1 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
Ł2 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ł3 $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow A) \rightarrow A$

más las regla de inferencia: *Modus Ponens* y, en caso de no usarse letras esquemáticas, Sustitución Uniforme y las mismas definiciones para $A \vee B$, $A \wedge B$ y $A \leftrightarrow B$ (cfr. 5.2.1).

Obsérvese el siguiente hecho algo extraño: mientras que en Ł3 no es tautología la ley clásica $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$, Ł3 tiene al *Modus Ponens* como regla de inferencia en tanto regla que preserva en los teoremas la tautologicidad de los axiomas. Retomaremos este punto en 5.3.

Finalmente, reseñaremos brevemente la forma en que el sistema Ł3 de Łukasiewicz da respuesta al problema de los futuros contingentes, el cual, como ya dijimos, había sido una de sus principales motivaciones para el rechazo a la bivalencia clásica. Para ello, Łukasiewicz definió en términos de valuaciones trivalentes, los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$ de la siguiente manera:

A	◊A	□A
1	1	1
#	1	0
0	0	0

Nótese que si la proposición A es un futuro contingente, entonces le corresponde el valor indeterminado #, y por lo tanto, es verdadera su posibilidad. Puede también constatarse que el sistema modal así obtenido tiene como tautologías modales las leyes clásicas $\models A \rightarrow \Diamond A$ y $\models \Box A \rightarrow A$. Sin embargo, en ella resulta válida la inferencia $\Diamond A, \Diamond B \models \Diamond(A \wedge B)$, no aceptada por ninguna lógica modal (Priest, 2001).

A partir de 1922, Łukasiewicz generalizó el sistema Ł3 a n valores, donde n es un número natural cualquiera $\geqslant 2$, conformando la familia de sistemas (finitos) Łn. Los sistemas de n-valores se

construyen mediante un procedimiento debido a S. Jaskowski, que establece cómo, a partir de un sistema de n-valores, se llega a otro de n+1 valores. Ejemplificaremos lo dicho con el método dado por Rescher (1969, p. 92) para la conjunción y a modo de inducir al lector a efectuar lo que hoy se da en llamar en las lógicas diagramáticas, un razonamiento «visual»:

$A \wedge B$

A \ B	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

$A \wedge B$

A \ B	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

$A \wedge B$

A \ B	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	5

En particular, las tablas de verdad de los Łn-sistemas se construyen agregando los valores de verdad intermedios $^{1}/_{n-1}, \ldots, ^{n-2}/_{n-1}$. De ello, intuitivamente se sigue que:

(i) Si n = 2, el sistema Łn coincide con LC.

(ii) Si n = 3, el sistema Ł3 es el sistema trivalente de Łukaziewicz;

(iii) Toda Łn-tautología es una LC-tautología, puesto que cualquier Łn-sistema coincide con LC cuando las valuaciones son 1 y 0; pero, al igual que para Ł3, no vale la conversa.

(iv) Todo sistema Łn contendrá fórmulas tautológicas que necesariamente no lo serán en Łn+1.

Como ejemplo de (iv) se tiene la fórmula $A \vee \neg A$, la cual es una tautología en Ł2 y no lo es en Ł3, porque, como ya se mostró, toma el valor # cuando A vale #. Esto hace que a medida que se incrementa el número de valores que puede tomar una fórmula atómica en un sistema Łn, decrece el número de las tautologías del mismo. Para una mejor comprensión de este resultado remitimos a Rescher (1969, p.38).

Finalmente, deseamos enfatizar los siguientes resultados: 1) dado que la axiomatización de Ł3 es generalizable a los sistemas Łn, todos los sistemas Łn son cerrados respecto de la regla *Modus Ponens*; 2) a partir de un teorema sobre Ł3, según el cual una fórmula A cualquiera de Ł3 es teorema si y sólo si A es una Ł3-tautología, se pudo probar el teorema generalizado según el cual, para cualquier sistema Łn, el conjunto de los teoremas, con *Modus Ponens* como regla de inferencia que preserva la tautologicidad, es igual al conjunto de sus tautologías y 3) las relaciones entre los conjuntos de tautologías de los diferentes sistemas Łn en relación con la recién mencionada disminución del número de tautologías de acuerdo al aumento de los valores de verdad fueron esclarecidas en un resultado de Lindembaun, según el cual cualquier sistema finito Łm y Łn, Łm $\subseteq$ Łn sii n-1 divide a m-1 (Urquhart, 1986, p. 83).

5.2.2 Los sistemas de infinitos valores Ł$\aleph_0$ y Ł$2^{\aleph_0}$

Puesto que no hay una matriz característica finita para los sistemas de infinitos valores, la matriz para estos se define en dos formas posibles, o bien sobre los números racionales en el intervalo [0,1], en cuyo caso el conjunto de los valores tiene la cardinalidad de los naturales $\aleph_0$ y por lo tanto es numerable, o bien sobre el intervalo [1,0] del conjunto de los números reales, y, en ese caso, la cardinalidad de este sistema será igual al cardinal de los reales, i.e., $2^{\aleph_0}$, de ahí que los denotemos por , Ł$\aleph_0$ y Ł$2^{\aleph_0}$ respectivamente. La matriz de Ł$\aleph_0$ y la de Ł$2^{\aleph_0}$ serán iguales a excepción del conjunto seleccionado, que será, para el caso de Ł$\aleph_0$, el conjunto de los números racionales en el intervalo [0,1], y para el caso de Ł$2^{\aleph_0}$, el conjunto de los números reales en el intervalo [0, 1]; el elemento designado es 1 y las operaciones correspondientes a las conectivas, llamadas generalmente *operaciones de Łukasiewicz*, se definen de la manera siguiente:

(i) $|\neg A| = 1 - |A|$
(ii) $|A \vee B| = \text{máx}\ (|A|,|B|)$
(iii) $|A \wedge B| = \text{mín}\ (|A|,|B|)$

$$\text{(iv)}\quad A \rightarrow B = \begin{cases} 1, \text{ si } |A|,|B| \\ \\ 1 - |A| + |B|, \text{ si } |A| > |B| \end{cases}$$

Las rayas verticales indican la valuación de las fórmulas, por lo cual, en nuestra simbología de la función valuación, (i) afirma que $V(\neg A) = 1 - V(A)$; (ii) dice que $V(A \vee B)$ toma la máxima (mayor) de las valuaciones de los disyuntos; (iii) afirma que $V(A \wedge B)$ toma la mínima (menor) de las valuaciones de los conyuntos y (iv) dice que $V(A \rightarrow B) = 1$ si la valuación del antecedente es menor o igual que la valuación del consecuente y que $V(A \rightarrow B) = 1 - V(A) + V(B)$, en el caso de que la valuación del antecedente sea mayor que la valuación del consecuente. Nótese además que, si en lugar de tomar todo el intervalo se toma un subconjunto finito cerrado, se obtienen las matrices para las conectivas de Łn, es decir, para el caso finito de los sistemas generalizados. Advierta el lector que cada Łn sistema genera un conjunto particular de tautologías, cada uno de los cuales contendrá a los conjuntos de $Ł_{\aleph_0}$ tautologías y, a su vez estará contenido en el conjunto de tautologías de Ł2, o sea, LC. Análogamente, los valores de verdad de $Ł_{\aleph_0}$ se obtienen considerando como tales todos los números racionales del intervalo [0,1], es decir todas las fracciones de la forma $^{k}/_{n}$ para $0 \leqslant k \leqslant n$.

Varios lógicos sostienen que, desde un punto de vista lógico, la distinción entre $Ł\aleph_0$ y $Ł2^{\aleph_0}$ es banal, ya que se ha demostrado que ambos conjuntos tienen el mismo conjunto de tautologías. Sin embargo, se hace necesario destacar que Wójciki (1989) muestra que $Ł\aleph_0$ y $Ł2^{\aleph_0}$, bajo determinadas circunstancias, no tienen el mismo conjunto de inferencias válidas. En la sección siguiente trataremos de aclarar mejor este resultado.

La axiomatización de la lógica de infinitos valores fue dada por primera vez también por Wajsberg (1935), y posteriormente

por Rose y Rosser en 1958, agregando a los tres axiomas de Ł3 dos axiomas propios para el caso de infinitos valores $Ł\aleph_0$, a saber (Urkuhart, 1986, pp. 84-85):

Ł1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ł2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Ł3 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
$Ł4_\aleph$ $(A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
$Ł5_\aleph$ $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$

más las reglas de inferencia *Modus Ponens* y, en caso de no utilizar letras esquemáticas, Sustitución. En 1958 se mostró que $Ł5_\aleph$ no era independiente y que, por lo tanto, era derivable de los restantes. El lector podrá comprobar que $Ł4_\aleph$ es independiente mostrando que $Ł4_\aleph$ no es Ł3-tautología.

5.3 La noción de consecuencia lógica de los sistemas de Łukasiewicz

Pese a que ya se dijo que para todo sistema Łn de Łukasiewicz, el conjunto de las tautologías coincide con el conjunto de los teoremas, este resultado no puede extenderse a cualquier lógica multivaluada, porque, como se verá en la sección siguiente, hay lógicas trivaluadas, como la de Bochvar, tales que, si se toma sólo el valor 1 como distinguido, carecen de tautologías. De ahí que el concepto de tautología sea insuficiente para caracterizar la noción de consecuencia de una lógica multivaluada. Por ello, a los efectos de determinar la relación de consecuencia lógica de una lógica multivaluada, usualmente se acuda al llamado *método de matrices.*

En líneas generales, este método se propone caracterizar una lógica mediante una matriz, la cual tiene por objeto especificar las conectivas de dicha lógica y el conjunto de sus proposiciones verdaderas. A este fin, se define una matriz (lógica) *M* como una es-

tructura compuesta por un álgebra *A* más un subconjunto propio D no vacío de elementos designados, o sea

$M = <A,D>$.

A su vez, el álgebra *A* (abstracta), es una estructura formada por un conjunto cualquiera no vacío U de valores de verdad y un conjunto de operaciones, i.e., A = {U, f_1, f_2, ... f_n}. Más específicamente: los elementos de la matriz *M* serán los valores de verdad que constituyen los elementos del conjunto U del álgebra; las operaciones serán las expresadas por las conectivas lógicas del álgebra y el subconjunto D estará formado por los elementos designados, de forma tal que D ⊆ U. Por ejemplo, la matriz característica de Ł3, o sea $M_{Ł3}$, está formada por los siguientes elementos: (i) el conjunto U = {1,#,0}, (ii) las operaciones ¬, →, ∧ y ∨, y (iii) el subconjunto D = {1}. Nótese que $M_{Ł3}$ podría haber contenido sólo la conectiva primitiva → y la negación y que la diferencia con la matriz de la lógica proposicional clásica $M_{Ł2}$ consiste en que en ésta U = {1,0}. De esta forma, puesto que cada matriz genera un conjunto de inferencias válidas específico, la relación de consecuencia lógica de un sistema queda determinada respecto de la matriz lógica correspondiente. Así, la noción de consecuencia de cada lógica n-valuada queda determinada por el conjunto de inferencias que preservan el 1 en tanto valor designado.

Sin embargo, ya mostramos en 5.2, que la matriz de Ł3 determina que ciertos teoremas clásicos sean inválidos, por ejemplo, no son válidas las inferencias (i) A ∧ ¬A ⊢ B y (ii) A ⊢ B ∨ ¬B. Por este motivo, la matriz de Ł3 genera una noción de consecuencia que no da lugar a una lógica estructuralmente completa, o sea que existen reglas preservativas de la verdad que no son reglas de Ł3. Más aún, Wójcicki (1984) muestra que ninguna lógica de Łukasiewicz que contenga # como valor de verdad lo es, ya que ninguna tiene como inferencia preservativa de la verdad la inferencia clásicamente válida, (A ∨ ¬A) → (A ∧ ¬A) ⊢ B. Como el lector podrá compro-

bar, esta inferencia resulta inválida cuando se asigna # a A y 0 a B. De esto se sigue que la base inferencial generada por la matriz de Ł3 es más débil que la base inferencial de LC, o sea $Q_{L3} < Q_{LC}$ y que, por ello, la operación de consecuencia de Ł3 es más débil que la de LC, o sea Cn(L3) < Cn(LC).

A su vez, desde la perspectiva de las lógicas subestructurales, se muestra un resultado similar. En efecto, Ł3 carece de la regla estructural de Contracción en el prosecuente (C ⊣). Esto se comprueba observando que, si la tuviera, la fórmula $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ sería teorema, ya que su prueba en lógica de secuentes la involucra (Restall, 2000, p. 28). Sin embargo, el lector podrá comprobar que esta fórmula no es teorema de Ł3 porque no es tautología, ya que ésta adquiere el valor # cuando V(A) = # y V(B) = 0.

Por otra parte, ya afirmamos que todo los sistemas de Łukasiewicz son cerrados bajo MP, pero que sin embargo, ni siquiera en Ł3 es tautología (i.e., teorema) la fórmula $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$. Análogamente se muestra que (Wójcicki, 1984, 13.1), pese a ser válida la inferencia $A \wedge \neg A \vdash \neg(A \rightarrow B)$, tampoco resulta teorema la forma implicacional $(A \wedge \neg A) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$, puesto que la fórmula $A \wedge \neg A$ nunca toma el valor 1. Esto sucede porque en las lógicas de Łukasiewicz no vale el TD en su forma clásica, o sea: $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$ sii $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge, ..., \wedge A_n) \rightarrow B$. En efecto, a partir de la definición recursiva siguiente:

(i) $A \rightarrow_1 B = A \rightarrow_1 B$
(ii) $A \rightarrow_n B = A \rightarrow (A \rightarrow_{n-1} B)$

sólo se sigue:

$A_1, A_2, ..., A_n \vdash_{Ln} B$ sii $\vdash_{Ln} (A_1 \wedge A_2 \wedge, ..., \wedge A_n) \rightarrow_{n-1} B$.

De donde se desprende que el conjunto de inferencias válidas de los sistemas Łn es mayor que el conjunto de sus teoremas o tautologías.

Sin embargo, la relación de consecuencia de las n-lógicas de Łukasiewicz es una operación de consecuencia a lo Tarski, ya que satisface los axiomas T1-T5 y cuya comprobación dejamos a cargo del lector. Además, todas las Łn lógicas son lógicas deductivas, ya que su operación de consecuencia satisface Monotnonía (o Atenuación).

Nos resta todavía hacer un breve comentario respecto de la noción de consecuencia de $Ł\aleph_0$ y $Ł2^{\aleph_0}$. La propiedad de la relación de consecuencia expresada en T4 (i.e., compacidad) no es generalizable a todos los sistemas multivaluados. En otras palabras, del hecho de que los sistemas de Łukasiewicz Ł3, Łn y $Ł\aleph_0$ sean finitamente axiomatizables no se sigue que toda matriz multivaluada lo sea. Al respecto Wójcicki (1988), prueba que si $Ł\aleph_0$ y $Ł2^{\aleph_0}$ son finitamente axiomatizables, i.e., se cumple compacidad, entonces el conjunto de las inferencias válidas es el mismo para ambos sistemas, pero que, sin la suposición de que son finitamente axiomatizables, las inferencias válidas de ambos son distintas. Esto se muestra mediante el llamado *Test de McNaugton* cuya complicada prueba consiste en demostrar que, mientras que $Ł\aleph_0$, en tanto conjunto de teoremas, es finitamente axiomatizable, no lo es en tanto conjunto de inferencias preservativas de la verdad (Wójcicki, 1988, 4.3).

5.4 Otros sistemas multivaluados

Entre la pluralidad de sistemas trivalentes existentes, reseñaremos sólo aquellos de más relevancia con relación a problemas filosóficos. En 1938, S. C. Kleene creó otra lógica trivalente, pero con motivaciones muy diferentes a las de Łukasiewicz. Su propósito era contar con una lógica aplicable a la teoría de funciones recursivas, que diera cuenta de aquellos problemas para los cuales una máquina no tuviera una respuesta ni por sí ni por no, es decir que, por distintas causas, la respuesta quedara indefinida. De ahí que

Kleene interprete al tercer valor # como *lo indefinido*. La diferencia radical con Ł3 reside en que al par <#,#> de la tabla del condicional, le hace corresponde también el tercer valor #, lo cual arroja como resultado que la fórmula A → A ya no es una tautología. Daremos ahora la matriz de Kleene, M_K.

M_K	A ∧ B			A ∨ B			A → B			¬A
A \ B	1	#	0	1	#	0	1	#	0	
1	1	#	0	1	1	1	1	#	0	0
#	#	#	0	1	#	#	1	#	#	#
0	0	0	0	1	#	0	1	1	1	1

Otro sistema trivalente importante por sus motivaciones filosóficas es el sistema B3 del lógico de origen ruso D. A. Bochvar de 1939. Su intención era evitar las paradojas, tales como la producida por la afirmación «Esta oración es falsa», proponiendo declarar a las oraciones que las expresan como oraciones sin sentido. Para ello introduce un tercer valor de verdad, #, que propone interpretarlo como *sin sentido*. La matriz correspondiente, M_{B3} es la siguiente:

M_{B3}	A ∧ B			A ∨ B			A → B			¬A
A \ B	1	#	0	1	#	0	1	#	0	
1	1	#	0	1	#	1	1	#	0	0
#	#	#	#	#	#	#	#	#	#	#
0	0	#	0	1	#	0	1	#	1	1

Nótese que, a diferencia de $M_{Ł3}$ y M_K, la matriz de B3 siempre arroja el tercer valor # cuando uno de los valores también es #. Dado que la matriz de B3 también tiene como elementos distinguido al 1, las fórmulas válidas de B3 nunca serán tautologías, sino que siempre serán *cuasi*-tautologías.

Desde otro campo totalmente distinto, H. Reichembach propuso una lógica trivalente con el fin de evitar ciertas anomalías causales en la física cuántica y en la que el valor # corresponde a aquellas oraciones sobre entidades que bajo ciertas condiciones es imposible calcular o medir, recibiendo por ello la interpretación de *indeterminado*. Este sistema agrega al sistema Ł3 de Łukasiewicz, dos formas más de negación (*negación cíclica* y *negación completa*), dos formas de implicación (*implicación alternativa* y *cuasi implicación*) y una forma más de bicondicional (*equivalencia alternativa*).

Dentro de las lógicas n-valuadas cabe citar los sistemas n-valuados de Post, de 1921, creada con el propósito de mostrar la completitud funcional del conjunto de conectivas, i.e., la propiedad de definir todos los conectivas proposicionales. Podríamos continuar citando distintos sistemas de lógicas multivaluadas, pero dejamos a cargo del lector la búsqueda de esta información en las lecturas sugeridas.

Tal vez los problemas filosóficos más difíciles en relación con las lógicas multivaluadas consistan en preguntarse por: 1) la interpretación de los valores de verdad, en particular del tercer valor #, y de los otros valores intermedios, si los hubiere; y 2) el significado de las conectivas proposicionales, según la matriz característica de cada lógica, en particular, el significado del condicional y de la negación.

Respecto de 1), Priest (2001) agrupa las interpretaciones dadas para el tercer valor #, de acuerdo con cuáles hayan sido las motivaciones para su introducción, en dos clases. Por un lado, estarían aquellos sistemas construidos sobre la base de que hay proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas, como por ejemplo, los futuros contingentes, los enunciados que contienen propiedades vagas y los que hablan sobre conceptos que no denotan, entre otros. Por el otro lado, están los sistemas formulados bajo la suposición de que hay proposiciones que pueden ser verdaderas y falsas. En principio, a la primer clase de proposiciones, a la hora de asignarles un valor

de verdad, debería corresponderles un lugar vacío o «hueco»(«*gap*») en las matrices de las conectivas lógicas. Pero, si se tomara esta decisión, los sistemas dejarían de ser veritativo funcionales. Por ello, se introduce el signo # y se lo interpreta como el valor de verdad *indeterminado* o *indefinido* o *desconocido* o con cualquier otra palabra que expresara el mismo sentido de indeterminación frente al valor de verdad de una proposición. Ł3, K3 y B3 pertenecen evidentemente a este tipo de interpretación del tercer valor #. La segunda clase de proposiciones son aquellas que se encuentran en el límite o zona de vaguedad de un predicado. Priest da como ejemplos de estas últimas a las proposiciones «contradictorias» de la tradición hegeliano- marxista y ciertas afirmaciones sobre microobjetos de la mecánica cuántica. Por ello, infiere Priest, en las matrices de las conectivas correspondientes a estos sistemas, el tercer valor ya no puede ser representado por un lugar vacío, sino un «glut». En otras palabras, Priest «llena» el lugar correspondiente con el mismo signo #, pero lo interpreta de una forma distinta. Ahora el signo # significa que las proposiciones atómicas tienen el valor *verdadero y falso.* Asimismo, el valor 1 debe leerse simplemente como *verdadero* y el valor 0 como *falso.* Además, introduce otro cambio que involucra consecuencias radicales: la matriz de su sistema LP, es la del sistema K3 de Kleene, pero se diferencia de ésta en que el conjunto de valores distinguidos D es igual al conjunto {1,#}. Así, la matriz de LP genera los siguientes resultados: la validez del principio del tercero excluido y la invalidez del *Modus Ponens* y de EFSQ. El PTE resulta obviamente válido porque su tabla ostenta una sola aparición de #, y en LP éste es un valor distinguido. Prima facie, esto induce a pensar que todas las *cuasi* tautologías de K3 , por esta misma razón, serán inferencias válidas de LP. Sin embargo esto no es así, ya que MP y EFSQ resultan inválidas en LP. Para comprender mejor este resultado proponemos al lector reproducir la matriz del condicional y de la negación de K3, sustituyendo el signo # por 01, ya que su significado afirma que una proposición tiene los valores 0 y 1 al mismo tiempo.

M_{LP} A \ B	1	01	0	¬A
1	1	01	0	0
01	1	01	01	01
0	1	0	1	1

Puesto que el valor 01 es distinguido, la invalidez del MP se demuestra encontrando una valuación en la cual A → B y A tengan valor 1 y B tenga el valor 0. Ésta se obtiene con V(A) = 01 y V(B) = 0, porque, tomando el 1de la valuación 01 de A, la valuación de A → B da 1. Respecto de EFSQ, se procede en forma análoga. Si V(A) = 01 y V(B) = 0, entonces, tomando en cuenta el 1 del valor 01, A ∧ ¬A resulta con valor 1.

Respecto del segundo tipo de problemas, está claro que la interpretación dada al valor # y la elección de los valores designados en una matriz cualquiera n-valuada involucra a su vez el significado de sus operaciones lógicas. En lo que sigue, trataremos de realizar algunas reflexiones sobre la negación. Sean las siguientes matrices para la negación correspondientes a los sistemas Ł3, K3 , B3 y LP, y cuyo con junto D de valores designados, para las tres primeras es {1} y {1,#} para LP.

	Ł3	K3	B3	LP
A	¬A	¬A	¬A	¬A
1	0	0	0	0
#	#	#	#	#
0	1	1	1	1

Rescher (1969) pide, como condición para que una matriz caracterice una operación de negación, que al menos ella no permita que la fórmula A y la fórmula ¬A tomen ambas el valor designado al mismo tiempo. Puesto que en las tres primeras el valor designado es el 1, este requisito se cumple y, por ello, aunque con interpretaciones diferentes para el signo #, las dos son formas de

negación. Sin embargo la negación de LP no cumple con esta característica ya que A y ¬A tienen el mismo valor designado #. La exigencia de Rescher nos parece razonable y por ello también nos parece razonable concluir que LP carece de un sentido mínimo de negación. Retomaremos este punto en el capítulo siguiente al tratar la lógica paraconsistente.

5.5 Comentarios marginales: sobre la lógica difusa

En 1965, Lofti Zadeh introdujo la noción de conjunto difuso, identificándolo como aquel que no cumple con el requisito clásico según el cual, dado un conjunto cualquiera A, para cualquier objeto x se puede determinar si pertenece o no al conjunto, es decir si $x \in A$ o $x \notin A$. El caso más popular de conjunto difuso es el originado por las propiedades vagas o inexactas, como por ejemplo, la propiedad de ser calvo, pues es obvio que no es cierto que para cualquier individuo con tendencia creciente a perder el cabello quede determinado unívocamente el número preciso de cabellos que debe perder para saber si pertenece o no pertenece al conjunto de los calvos. Según P. Hájek (2002), hay dos sentidos de lógica difusa que conviene distinguir: un sentido amplio, en el cual se la usa para referirse a la teoría de conjuntos difusa y sus aplicaciones, y otra en sentido estrecho, que se la caracteriza como teoría del razonamiento aproximado basada en una lógica multivaluada. En esta última la misma cuestión se reproduce en la siguiente pregunta: ¿En qué momento preciso de su vida, un hombre (biológicamente) joven, deja de serlo? ya que, si hoy tiene 25 años, y es joven, también lo será en los próximos diez segundos y en los otros próximos y, de acuerdo al *Modus Ponens* lo será también indefinidamente. Formalmente expresado: Sea Ja_1, la oración *Antonio es joven en el segundo 1* y $Ja_1 \rightarrow Ja_{1+10}$, el condicional que dice *Si Antonio es joven en el segundo uno lo es también en los diez segundos siguientes* y así sucesivamente. Como es verdad Ja_1, entonces por *Modus Ponens,*

será verdad Ja_{1+10}; pero como $Ja_{1+10} \rightarrow Ja_{1+10+10}$ y Ja_{1+10} es verdadera, entonces por MP, $Ja_{1+10+10}$ es también verdadera. Generalizando: para cualquier k, si se cumple Ja_{k-1} y $Ja_{k-1} \rightarrow Ja_k$ entonces por MP será verdadera Ja_k. Esta secuencia reproduce el problema planteado por la inferencia conocida como *paradoja de Sorites*, atribuida al lógico megárico Eubúlides. En general, la lógica difusa intenta responder a los problemas en los cuales no se puede determinar en qué punto se encuentra la solución definitiva. Básicamente, un sistema de lógica difusa se define sobre el intervalo [1,0] de los números reales, de forma tal que el 1 es interpretado como *absolutamente verdadero* y el 0 *como absolutamente falso*, los valores intermedios se interpretan como grados verdad. Varias tautologías clásicas son también tautologías de la lógica difusa, pero tiene la gran particularidad de que en ella no es válida la regla del *Modus Ponens*, porque si lo fuera la paradoja de Sorites sería válida. En general (Sangalli,1998), las reglas de inferencia difusa tienen la forma de un condicional:

Si x es A e y es B entonces z es C
x es A' e y es B'
———————————
z es C'

El problema es que puede darse que A = A' y B = B' pero no necesariamente se cumplirá que C = C'. Precisamente la «aproximación a la verdad» a la que llega la conclusión, hace que varios lógicos se pregunten si la lógica difusa constituye realmente una lógica (Hájek, 2002).

Lecturas sugeridas

El libro de referencia obligado en relación con las lógicas multivaluadas es el clásico texto de N. Rescher, *Many-valued Logic* (1969). Una exposición en español de las lógicas multivaluadas pero en

formulación algebraica se encuentra en el artículo de Lorenzo Peña, Lógicas multivalentes, incluido en el tomo 7 de la ya citada *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía.* Dos artículos introductorios pero de exposición rigurosa son los de R. Grandy, Many-valued, Free and Intuitionistic Logics y G. Malinowaki, Many-valued Logic, en *A companion to Philosophical Logic* (2002). Para una exposición de mayor profundidad, sistemática y generalizada de los sistemas multivaluados, se recomienda el trabajo de A. Urquhart, Many-valued Logic, en el vol. III, *Alternatives to Classical Logic,* del *Handbook of Philosophical Logic* (1986). Otra exposición generalizada de la lógica multivaluada, desde un enfoque solamente semántico se encuentra en el libro ya recomendado, *An Introduction to Non-classical Logic,* de G. Priest. Un tratamiento particular y exhaustivo de los futuros contingentes y de la lógica intuicionista, se encuentra en A. N. Prior, *Formal Logic* (1962). Para una excelente exposición introductoria de la lógica difusa, se recomienda el trabajo de P. Hájek, Why Fuzzy Logic? también incluido en *A companion to Philosophical Logic.* Para los interesados en lógica difusa, se recomienda el libro en español de Trillas y otros, *Introducción a la lógica borrosa.* Un libro accesible sobre lógica difusa es el de Arturo Sangalli, *The importance of Being Fuzzy, and other insights between Math and computers* (1998). Para una visión global de la problemática de las lógicas multivaluadas, sus motivaciones y la problemática filosófica en torno a ellas, se hace indispensable el libro de Susan Haack ya mencionado, *Deviant Logic,* especialmente su edición de 1996, la cual se titula precisamente *Deviant Logic, Fuzzy Logic.* Una excelente discusión de los problemas filosóficos en torno a la lógica difusa, las lógicas multivaluadas y las lógicas libres se encuentra en el libro ya recomendado antes de S. Read, *Thinking about Logic.*

6
Las lógicas paraconsistentes y la crítica al principio de no contradicción

6.1 Los argumentos a favor de la admisibilidad de las contradicciones

Desde una tradición iniciada tal vez con Heráclito y pasando sin duda alguna por Hegel y Marx, se clama por la existencia de «contradicciones» en el devenir del mundo real, de las cuales tanto la lógica como la ciencia deben dar cuenta, sin por ello aminorar la racionalidad de la «razón» y de las teorías científicas. Sin embargo, es sabido que desde Aristóteles las contradicciones no tienen lugar en la lógica clásica, ya que si se las admite, la lógica se torna trivialmente inconsistente, i.e., en ella es posible deducir cualquier afirmación. Duns Escoto fue el primero en expresar esta idea mediante el principio conocido como *Ex contradictione quodlibet* (ECQ) o, *Ex falsum sequitur quodlibet* (EFSQ). Sin embargo, pese a sus siglos de vigencia, fue criticado, recién en 1912, por el lógico aristotélico N. A. Vasil'ev. Asimismo, los primeros sistemas formales de lógica paraconsistente aparecieron una vez terminada la Segunda Guerra Mundial, en lugares muy distintos y en forma independiente unos de otros. El primero fue creado por el lógico polaco S. Jaskowski, en 1949, y los restantes se deben a F. G. Asenjo, (Argentina, 1954), N. C. A. da Costa (Brasil, 1958) y T. J. Smiley (Reino Unido,1959). El término «paraconsistente» fue propuesto por el peruano F. Miró Quesada en el 3er. Simposio Latinoamericano sobre lógica matemática, celebrado en el año 1976. Sin embargo, sólo en Australia y Brasil puede afirmarse que se ha formado una tradición en este tipo de lógica.

Sus seguidores han abundado en razones para justificar la necesidad de construir sistemas de lógica paraconsistente, que admitan

proposiciones contradictorias pero que al mismo tiempo no permitan que en ellos cualquier afirmación sea demostrable, i.e., que sean trivialmente inconsistentes. A continuación, sintetizaremos las más relevantes.

1) La inconsistencia es un fenómeno natural del mundo. Por ello, existen conjuntos de informaciones, conjuntos de leyes u obligaciones morales, conjuntos de creencias e incluso teorías científicas o filosóficas inconsistentes, las cuales exigen métodos específicos para razonar. Ejemplos de estas últimas lo constituyen la mecánica cuántica en la interpretación de Everett-Wheeler, la descripción de Bohr sobre el comportamiento del átomo, el cálculo infinitesimal bajo una interpretación de su formulación original, las teorías basadas en lenguajes semánticos cerrados, las paradojas de la autorreferencia, tales como la del mentiroso o la misma paradoja de Russell (Priest & Routley,1984), entre otros.

2) La existencia de predicados vagos parece también exigir la admisión de cierto tipo de contradicciones, ya que para estos casos es plausible admitir como consecuencia la aceptación de contradicciones de la forma $Fa \wedge \neg Fa$, donde F representa cualquier predicado vago, sin que por ello la teoría necesariamente deba ser trivialmente inconsistente.

3) Si bien la teoría de los objetos de Meinong no debe entenderse como formalmente inconsistente, la interpretación paraconsistente de ella evita problemas y permite una formulación más sencilla. Curiosamente, a la objeción de Bertrand Russell acerca de que la teoría de Meinong admite enunciados contradictorios tales como *El cuadrado que no es cuadrado es cuadrado* y *El cuadrado que no es cuadrado no es cuadrado*, el mismo Meinong respondió sosteniendo que ciertos principios lógicos no son válidos en determinadas ontologías, en particular, que el Principio de no Contradicción no es válido en el dominio de los objetos imposibles, o sea, de los objetos contradictorios.

4) Razones propiamente filosóficas, tales como las insinuadas por Wittgenstein en sus escritos sobre matemática cuando afirma que las contradicciones no son tan destructivas como los formalismos clásicos creen (N. A. da Costa & D. Marconi, 1988).

Los sistemas de lógica paraconsistente que se han creado en función de las motivaciones antes reseñadas u otras similares, se caracterizan en general por constituir teorías no-trivialmente inconsistentes, es decir, teorías en las cuales es posible que determinadas contradicciones sean válidas, sin que por ello cualquier fórmula lo sea. Así, el primero y central problema que deben encarar estos sistemas es permitir que ciertas contradicciones sean verdaderas sin que la teoría se «trivialice». Esta propiedad de trivialización (Triv) se suele presentar de las dos siguientes formas:

(i) $A, \neg A \vdash B$ (ii) $(A \wedge \neg A) \vdash B$

Es obvio que, aunque expresadas de distinta manera, ambas corresponden a la inferencia conocida bajo el nombre de *Ex contradictione quodlibet* (ECQ), la cual constituye la versión inferencial del principio de Duns Escoto, $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$, el cual, en lógica clásica, es equivalente a la paradoja negativa del condicional material $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. De ahí que el segundo problema consista en modificar el significado de la negación y del condicional a fin de validar contradicciones sin por ello aceptar Triv. En suma, todo sistema que pretenda constituir una lógica paraconsistente, debe satisfacer al menos las siguientes condiciones:

– El Principio de no Contradicción no debe ser válido, o sea $\nvDash \neg(A \wedge \neg A)$.

– La regla ECQ no debe ser una inferencia válida, o sea $(A \wedge \neg A) \nvDash B$.

– Las leyes y reglas de la lógica clásica compatibles con (i) y (ii) deben continuar siendo válidas.

Ya vimos que el primer sistema de lógica paraconsistente para el cálculo proposicional fue construido por S. Jaskowski, quien, siguiendo una sugerencia de Łukasiewicz, lo llamó lógica *discussive o discoursive*. Posteriormente, en 1958, N.A. da Costa, en forma independiente del enfoque de Jaskowski, concibió la forma de desarrollar varios sistemas de lógica paraconsistente tanto para el cálculo proposicional como para el de predicados. En realidad, el conjunto de lógicas paraconsistentes existente hoy en día conforma una gran familia. A su vez, los sistemas paraconsistentes de N. A. da Costa más conocidos fueron presentados bajo la forma de la familia jerárquica de sistemas paraconsistentes Cn ($1 \leqslant n \leqslant \omega$). Entre las diversas estrategias existentes para construir un sistema de lógica paraconsistente, da Costa y sus seguidores optaron por la alternativa de introducir una negación más débil que la negación clásica. Dado el enfoque del presente libro y nuestra convicción acerca de que lo más interesante de la lógica paraconsistente radica en la posibilidad que ofrece de expresar las características más importantes de la dialéctica hegeliana, comenzaremos nuestro análisis presentando el sistema construido por Newton da Costa y Robert Wolf, específicamente creado para dar cuenta del principio dialéctico de Unidad de los Opuestos y expuesto en el trabajo Studies in Paraconsistent Logic I: The Dialectical Principle of the Unity of Opposites (1980).

6.2 El sistema de lógica dialéctica LD de N. A. da Costa

6.2.1 Características intuitivas de LD

En el mencionado artículo, da Costa y Wolf se ocupan de señalar que el sistema de lógica proposicional paraconsistente LD no intenta representar todos los aspectos de la lógica dialéctica de Hegel y Marx, sino más bien algunos rasgos esenciales. En particular, en el sistema LD se pretende mostrar el tipo de elucidación que

desde la lógica formal es posible ofrecer respecto de la teoría dialéctica, en relación con el Principio de Unidad de los Opuestos. Para ello, eligen tres de las seis interpretaciones que McGill y Parry dieron de este principio en el año 1948, a saber:

a) Un sistema o proceso concreto está simultáneamente determinado por fuerzas, tendencias, movimientos, dirigidos en sentido opuesto, i.e., hacia A y no-A.

b) En todo *continuum* concreto, temporal o no, entre dos propiedades contiguas y opuestas A y no-A, existe una zona intermedia, i.e., un tramo del *continuum*, en el cual no es verdadero que toda cosa sea A o no-A.

c) En todo *continuum* concreto hay un tramo en el cual es verdadero que algunas cosas sean A y no-A.

La formulación a) es descartada para el análisis, porque para McGill y Parry, no contradice a la lógica clásica, simplemente por el hecho de que no involucra ninguna afirmación lógica genuina. Por ello, deciden aceptar las dos restantes como interpretaciones adecuadas del mencionado principio dialéctico. Sin embargo, debe reconocerse que la formulación a) pone de manifiesto que la dialéctica hegeliana traspasa los límites de la lógica dialéctica e implica que el mencionado principio debe ser pensado como un criterio normativo general acerca de la estructura del mundo y de las teorías, tanto científicas como filosóficas. Es posible que este principio tenga, dentro de la lógica hegeliana, un estatus similar al Principio de no contradicción respecto de la lógica aristotélica, en el sentido de que éste enfatiza más los aspectos ontológicos que los estrictamente lógicos. En efecto, Aristóteles dedica el libro Γ de la Metafísica casi totalmente al tratamiento del Principio de no-contradicción y, en la Metafísica (3,1005$_b$19), lo formula desde una perspectiva ontológica, afirmando que *lo mismo no puede pertenecer y no pertenecer conjuntamente a lo mismo bajo el mismo aspecto.* Más aún, en los Segundos Analíticos (A 11,77$_a$10) afirma que este

principio no es necesario para ninguna demostración sino que se encuentra en el fundamento mismo de las cosas y por ello «es verdadero para todas las cosas que son».

Según da Costa y Wolf, si se quiere construir un sistema paraconsistente que dé cuenta del Principio de Unidad de los Opuestos bajo las interpretaciones aceptadas y al mismo tiempo satisfaga las condiciones expuestas en 6.1, éste debe contener las siguientes particularidades:

(i) Poseer un tipo de negación más débil que la negación clásica , designada por el signo «~», definida sólo por las leyes de De Morgan, la cual recibirá el nombre de *negación concreta* o *débil.*

(ii) Poseer una constante,°, llamada *estabilizador*, para referirse a aquellas fórmulas que se «comportan bien», es decir que se comportan de acuerdo a la lógica clásica, de tal forma que A° se interprete como aceptando la ley clásica ¬(A ∧ ¬A), y

(iii) Definir las conectivas proposicionales ∧, ∨, → y ↔ mediante matrices veritativo funcionales finitas.

Como lo mostraremos más adelante, la introducción de la negación débil ~ conduce directamente a la satisfacción de las dos primeras condiciones exigidas para una lógica paraconsistente, ya que en el sistema resultarán inválidos el Principio de Doble Negación, del Principio del Tercero Excluido, la equivalencia entre éste y el Principio de no Contradicción y la regla ECQ.

El rechazo de la doble negación se hace obvio, ya que en el proceso dialéctico, la tesis A, deviene en su antítesis no-A y a su vez ésta deviene en la síntesis no-no-A, la cual no será nunca equivalente a A. Además, como el rechazo de la doble negación arrastra el rechazo de la ley de Contraposición (dado que la hipótesis del absurdo que implica su prueba es ~~A), tampoco la fórmula (A → B) → (~B → ~A) es teorema. En opinión de da Costa y Wolf, el hecho de que esta ley no pueda ser un principio dialéctico constituye una de las contribuciones que la lógica paraconsistente

hace respecto de la dialéctica. Sostienen esto porque la eliminación de esta ley no proviene del modelo elegido, sino del hecho de que en este sistema, si a los axiomas de LD se le adicionan las leyes de Contraposición y Doble negación, el sistema LD «colapsa» en el cálculo proposicional clásico, i.e., LD se hace indiferenciable de LC. Pasaremos ahora a dar LD en su formulación axiomática.

6.2.2 La formulación de LD al estilo Hilbert

LD se construye axiomáticamente, es decir como un cálculo al estilo Hilbert. El lenguaje L de LD es un lenguaje proposicional con $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ y $^\circ$ como constantes lógicas primitivas y las reglas de formación de fórmulas correspondientes. Su relación de consecuencia está determinada por la base deductiva Q_{LD}. Esta base deductiva se construye en tres etapas.

Primera etapa: se parte de un conjunto de axiomas equivalente a la lógica proposicional positiva H_+, o sea:

LD1	$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$	
LD2	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$	
LD3	$A \rightarrow B, A \vdash B$	(MP)
LD4	$\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$	
LD5	$\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$	
LD6	$\vdash A \rightarrow (A \vee B)$	
LD7	$\vdash B \rightarrow (A \vee B)$	
LD8	$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$	
LD9	$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$	
LD10	$\vdash A \vee (A \rightarrow B)$	

Nótese que LD3, aunque figura como axioma, es la regla de inferencia *Modus Ponens*. Dado que en LD vale el teorema de la deducción TD, si $\Gamma, A \vdash B$ entonces $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ y, aunque por usar letras metalingüísticas no se incluya la regla de Sustitución Unifor-

me, ésta también se satisface, entonces la base deductiva de Q_{LD+} es igual a la base deductiva Q_{H+}. A su vez, debe aclararse que la base deductiva de LD podría haber sido cualquier otra variante del fragmento positivo de la lógica clásica, inclusive podría ser sustituida por la base deductiva R_+ del sistema R de A&B, lo cual daría como resultado un sistema de lógica paraconsistente relevante.

Segunda etapa: en un segundo paso, la base deductiva de LD_+ es enriquecida con el signo ~ para la negación *concreta*, la cual, como ya se dijo, es caracterizada mediante las leyes de De Morgan, agregando dos axiomas más:

LD11 $\vdash \sim (A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$
LD12 $\vdash \sim (A \vee B) \leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$

Al fragmento de LD cuya base deductiva es LD1-LD12, lo llamaremos $LD_{\sim}$.

Tercer etapa: en esta etapa, para obtener el sistema LD, el lenguaje de $LD_{\sim}$ se enriquece con la constante primitiva «°», que cumple la función de un «estabilizador», en el sentido ya señalado de que, si A° es verdadera, entonces A cumple con todas las leyes de la lógica clásica, es decir, la fórmula A «se comporta bien». De ahí que los autores propongan la interpretación alternativa de ° directamente como $\neg(A \wedge \neg A)$. La base deductiva de LD, Q_{LD} se completa con seis axiomas más, a saber:

LD13 $\vdash A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (\sim A)^\circ)$
LD14 $\vdash A^\circ \wedge B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$
LD15 $\vdash A^\circ \rightarrow (\sim\sim A \rightarrow A)$
LD16 $\vdash A^{\circ\circ} \leftrightarrow A^\circ$
LD17 $\vdash A^\circ \rightarrow ((A \vee \sim A) \wedge ((A \rightarrow B) \vee (\sim A \rightarrow B)))$
LD18 $\vdash \sim (A^\circ) \rightarrow (((A \vee \sim A) \rightarrow B) \vee (A \wedge \sim A))$

Nos interesa destacar el significado de algunos de estos axiomas. El axioma LD13 dice que si las fórmulas A y B son estables, enton-

ces también lo son sus elementos componentes, es decir, las conectivas de LD se comportan como las conectivas clásicas y, por lo tanto, valen para ellas las mismas leyes clásicas. LD14 y LD15 son claves para distinguir el comportamiento de la negación dentro de una fórmula que tiene estabilizador, ya que LD14 afirma que si las A y B tienen estabilizador, entonces, si A implica una contradicción $B \wedge \sim B$, entonces A es falsa; y LD15 dice que, si una fórmula tiene estabilizador, entonces para ella rige la regla de Eliminación de la Doble Negación. LD 16 afirma que $A^{\circ\circ}$ es estable si y sólo si A° es estable. LD17 afirma que si una fórmula A tiene estabilizador, entonces al igual que en LC, vale el PTE y que A y ~A no pueden ser ambas verdaderas o ambas falsas. Finalmente, LD18 dice que si una fórmula A carece de estabilizador, A y ~A pueden ser ambas verdaderas o ambas falsas.

Veamos ahora algunos resultados metateóricos de LD:

I. Todos los teoremas y reglas válidas de H_+ (i.e., LC_+) son válidos en LD. Este resultado es obvio ya que LD es una extensión conservativa del fragmento positivo de LD.

II. Los siguientes esquemas válidos de LC no son válidos en LD:

1. $\nvdash A \leftrightarrow \sim\sim A$ (DN)
2. $\nvdash A \vee \sim_s A$ (PTE)
3. $\nvdash (A \wedge \sim A) \to B$ (ECQ)
4. $\nvdash (A \to B) \to (\sim A \vee B)$
5. $\nvdash \sim (A \wedge \sim A)$ (PNC)
6. $\nvdash (A \to B) \to \sim (A \wedge \sim B)$
7. $\nvdash A \to (\sim A \to B)$ (Paradoja Negativa)
8. $\nvdash (A \to \sim_s A) \to \sim A$
9. $\nvdash ({}_s\!\sim A \to A) \to A$
10. $\nvdash (\sim B \to \sim A) \to (A \to B)$ (Contraposición clásica)
11. $\nvdash (A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$ (Contraposición intuicionista)

III. En LD son válidas, entre otras, las siguientes fórmulas e inferencias:

$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
$\vdash (A^{\circ} \wedge (A \wedge {\sim}A)) \rightarrow B$
$\vdash (A^{\circ} \wedge (A \wedge {\sim}A)) \rightarrow {\sim}B$
$A^{\circ} \vdash A^{\circ} \vee {\sim}A^{\circ}$
$B^{\circ} \vdash (A^{\circ} \rightarrow B^{\circ}) \rightarrow ((A^{\circ} \rightarrow {\sim}B^{\circ}) \rightarrow {\sim}A^{\circ})$
$A^{\circ} \vdash A^{\circ} \rightarrow ({\sim}A^{\circ} \rightarrow B^{\circ})$

IV. Es posible definir en LD la negación clásica de la siguiente forma:

Def. 1 $\bot =_{df} A^{\circ} \wedge A \wedge {\sim}A$ (donde A es una fórmula proposicional atómica fija), o

Def. 2 $\neg A =_{df} A \rightarrow \bot$, donde la constante $\bot$ no pretende denotar una *contradicción fuerte,* sino que mediante ella se significa que $\neg$ obedecerá las leyes de la lógica clásica. Finalmente,

V. Son teoremas de LD, entre otras, las siguientes fórmulas que involucran la negación clásica:

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
$\vdash A \vee \neg A$
$\vdash A^{\circ} \rightarrow (\neg A \leftrightarrow {\sim}A)$
$\vdash \wedge \rightarrow A$
$\vdash (A \rightarrow \wedge) \leftrightarrow \neg A$

A nuestro propósito, interesa solamente realizar algunas observaciones sobre el fragmento que involucra a la negación concreta $\sim$, o sea, $LD_{\sim}$.

El conjunto de las fórmulas inválidas de $LD_{\sim}$, muestra claramente que ni la negación de $LD_{\sim}$ es la negación clásica, ni el condicional

de $LD_{\sim}$ es el condicional material. En particular, da Costa y Wolf sostienen que la negación cumple con los requisitos esenciales de la lógica dialéctica y, por ello, proponen leerla de manera distinta a la negación clásica, en el sentido de no aceptar la definición de la falsedad como la negación concreta de la verdad. En otras palabras, mientras la negación clásica $\neg A$ se lee directamente como *A es falsa*, la negación concreta $\sim A$ debe leerse como *A no es verdadera*. Asimismo, puesto que el condicional de LD no es definible en términos de la negación y la disyunción, ni en términos de la conjunción y negación, el condicional de LD es un signo lógico primitivo. En suma, dado que las definiciones del condicional en término de las restantes conectivas involucran la ley de Doble Negación, éstas no pueden ser leyes de LC, i.e., el condicional de LD no es el condicional material debido a que la negación $\sim$ no es la negación clásica. A los efectos de comprender la adecuación del sistema LD al fin que se propusieron da Costa y Wolf se hace necesario exponer su semántica.

6.2.3 La semántica de LD

En la semántica de LD se define una función valuación V que hace corresponder a cada fórmula de LD un elemento del conjunto {0,1→, en forma similar a la función valuación V de la lógica proposicional clásica. Las valuaciones que V asigna a las fórmulas de LD_{+} coinciden con las de LC respecto de las conectivas $\rightarrow$, $\wedge$ y $\vee$. De esta forma se obtiene para fórmulas cualesquiera A y B de LD las siguientes matrices, similares a las de LC, en las cuales el conjunto D de elementos designados es también {1}:

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
0	0	1	0	0

Por lo cual, las condiciones de verdad establecidas por la función V respecto de $\vee$, $\wedge$ y $\rightarrow$ son iguales a las clásicas, o sea:

(i) $V(A \wedge B) = 1$ sii $V(A) = V(B) = 1$
(ii) $V(A \vee B) = 1$ sii $V(A) = 1$ o $V(B) = 1$
(iii) $V(A \rightarrow B) = 1$ sii $V(A) = 0$ o $V(B) = 1$

Puesto que la negación débil no es veritativo funcional, las condiciones de la función V para esta negación débil se establecen mediante las condiciones de verdad que corresponden a las leyes de De Morgan:

(iv) $V(\sim (A \vee B)) = 1$ sii $V(\sim A) = V(\sim B) = 1$
(v) $V(\sim (A \wedge B)) = 1$ sii $V(\sim A) = 1$ o $V(\sim B) = 1$

Las restantes condiciones involucran a fórmulas que contienen fórmulas con °:

(vi) Si $V(A^{\circ}) = V(B^{\circ}) = 1$ entonces $V(A \rightarrow B)^{\circ} = (A \wedge B)^{\circ} = V(A \vee B)^{\circ} = ((\sim A)^{\circ}) = 1$
(vii) $V(A^{\circ}) = 1$ sii $V(A^{\circ\circ}) = 1$
(viii) Si $V(A^{\circ}) = 1$ entonces $V(\sim A \rightarrow A) = 1$
(ix) Si $V(A) = V(\sim A)$ entonces $V(A^{\circ}) = 0$
(x) Si $V(A) \neq V(\sim A)$ entonces $V(\sim A^{\circ}) = 0$

Como se vio, la negación concreta no tiene matriz característica finita (da Costa & W, 1980, teorema 16). Específicamente, las condiciones (iv) y (v), muestran que $V(\sim A)$ puede ser 1 o 0, cualquiera sea $V(A)$, lo cual muestra que efectivamente la negación concreta no es una constante veritativo funcional. Esto hace que en LD esté permitido que tanto A como $\sim A$ adquieran ambas el valor 1, ambas el valor 0, que una adquiera el valor 1 y su negación concreta 0 y viceversa. Aplicando la función valuación dada, el lector podrá comprobar fácilmente la invalidez de las fórmulas e inferencias

consignadas en 6.2.2. En particular, la interpretación dada a la negación concreta ~ posibilita que en LD se presenten situaciones en las cuales un conjunto de fórmulas, pese a tener modelo (i.e., ser no trivial), sea inconsistente respecto de ~ (ibidem, teorema 15).

Representadas bajo la forma de tabla, las condiciones establecidas por la función valuación V para las fórmulas que contienen ~, (cláusulas iv y v), serían la siguientes:

$\sim A$	$\sim B$	$\sim (A \wedge B)$	$\sim (A \vee B)$
1	1	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	0

Sin embargo, pese a que la negación concreta no posee matriz veritativo funcional, mediante un método debido a da Costa y Alves en 1977, se muestra que LD es *decidible*. Este método consiste en construir una cuasi matriz para cada fórmula de LD, el cual, expuesto en forma abreviada, consta de los siguientes procedimientos:

1. Si la fórmula no tiene los signos ~ y °, se procede de acuerdo a las matrices de LC.
2. Si la fórmula tiene la forma ~B, entonces se bifurca la línea de manera tal que pueda adquirir valor 1 o 0, ya que la negación concreta no es veritativo-funcional por no tener matriz propia.
3. Si la fórmula tiene la forma B°, entonces, si el valor de B es el mismo que el de ~B, se asigna 0 a B, caso contrario, también se bifurca la línea.

Daremos ahora un ejemplo con el solo propósito de ilustrar parcialmente el procedimiento mencionado.

Sea la fórmula: $A° \rightarrow (A \vee \sim A)$, la cuasi matriz es la siguiente:

1)

A	~A	A ∨ ~ A	A°	→	(A ∨ ~A)
1	0	1	0	1	1
			1	1	1
	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0
	1	1	1	1	1
			0	1	1

Luego, dado que para cualquier valuación, $V(A° \rightarrow (A \vee \sim A)) = 1$, la fórmula es válida, i.e., es una tautología de LD. El siguiente ejemplo muestra cómo en LD resulta inválido el Principio del Tercero excluido y por qué se admiten ciertas contradicciones.

2) $A \vee \sim A$ (PTE) y $A \wedge \sim A$

A	~A	A ∨ ~A	A ∧ ~A
1	1	1	1
	0	1	0
0	1	1	0
	0	0	0

La cuarta columna muestra que la formula $A \wedge \sim A$ admite, a diferencia de la lógica clásica, que hay contradicciones verdaderas, precisamente en los casos en que ambos conyuntos A y ~A tienen valor 1. Asimismo, el lector podrá comprobar que el Principio de no Contradicción, $\sim (A \wedge \sim A)$, resulta también inválido en LD. Sin embargo, la característica principal del sistema LD es que en él resultan inválidas las leyes clásicas DN y ECQ, tal como se muestra a continuación:

3) A ↔ ~~A (DN)

A	~A	~~A	A ↔ ~~A
1	1	1	1
		0	0
	0	1	1
		0	0
0	1	1	0
		0	1
	0	1	0
		0	1

4) (A ∧ ~A) → B (ECQ)

A	B	~A	A ∧ ~A	(A ∧ ~A) → B
1	1	1	1	1
		0	0	1
0	1	1	0	1
		0	0	1
1	0	1	1	0
		0	0	1
0	0	1	0	1
		0	0	1

El despliegue del método permite comprender mejor las distintas situaciones que en LD se dan respecto de la negación concreta. En efecto, respecto de A y ~A se dan los siguientes cuatro posibles casos:

(i) A verdadera y ~A falsa;
(ii) A falsa y ~A verdadera;
(iii) A y ~A ambas verdaderas; y
(iv) A y ~A ambas falsas;

Nótese que la responsabilidad de admitir contradicciones radica en la invalidez de la Doble Negación, mientras que la invalidez de ECQ permite que LD no sea trivialmente inconsistente. Sin embargo, puesto que hay conjuntos de fórmulas que tienen modelo, se prueba que LD es ~– consistente.

Finalmente, para expresar fielmente el Principio de Unidad de los Opuestos en sus formulaciones b) y c), que involucran el continuo, da Costa y Wolf siguen el enfoque de Routley y Meyer (1976) y agregan tres nuevos axiomas que incorporan constantes lógicas que toman valores del continuo, obteniendo el sistema LD*. Dado que, desde un punto de vista lógico, estos nuevos axiomas no modifican las características de DL, no consideramos necesario explayarnos más en este sistema. No obstante el carácter paradigmático de LD, debe observarse que, dadas sus motivaciones específicas señaladas al comienzo, este es un sistema que puede considerarse *ad hoc*, o sea que formaliza el caso particular de las inferencias paraconsistentes válidas en el contexto regido por el Principio de Unidad de los Opuestos. De ahí que, a fin de construir sistemas paraconsistentes que culminen en una lógica, se haga necesario una presentación general, tal como la que hace el mismo da Costa en la familia de sistemas paraconsistentes, C_n $(1 \leqslant n \leqslant \omega)$ que pasaremos a reseñar brevemente.

6.3 Los sistemas C_n $(1 \leqslant n \leqslant \omega)$

La familia de sistemas paraconsistentes más conocida tal vez sea la constituida por los sistemas C_n $(1 \leqslant n \leqslant \omega)$, formulados por N. C. A. da Costa en 1974 y por A. I. Arruda en 1980. Esta familia tiene una estructura jerárquica de tal forma que si *n* fuera igual a 1, entonces C_1 sería la lógica clásica. Los siguientes sistemas se construyen debilitando la negación de la lógica clásica hasta que la regla ECQ resulte inválida, pero de forma tal que continúen siendo válidas las leyes clásicas que rigen las restantes conectivas proposi-

cionales. Dado que la negación resultante no es veritativo funcional y cada vez es más débil que la clásica, hoy en día suele llamárselos *lógicas débilmente negativas*. Es interesante destacar que se puede obtener la misma jerarquía de cálculos partiendo de la lógica intuicionista como C_1.

C_ω es el más débil de todos los sistemas de la jerarquía y por ello tiene solamente 11 axiomas. Si en lugar de partir de la lógica clásica, i.e. C_1, se parte de C_ω, entonces los C_n sistemas más fuertes se construyen agregando cinco axiomas más (da Costa y Guillaume, 1965), en forma similar a como se construyó LD. En todos los C_n $(1 \leqslant n \leqslant \omega)$ es posible definir una negación «compuesta», a saber:

$$\sim A =_{df} A \wedge \sim A$$

Por lo expuesto, y dado nuestro propósito, expondremos brevemente el cálculo más débil, i.e. C_ω.

Los axiomas de C_ω son los siguientes:

$C_\omega 1$ $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
$C_\omega 2$ $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
$C_\omega 3$ $A \rightarrow B, A \vdash B$ (*Modus Ponens*)
$C_\omega 4$ $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$
$C_\omega 5$ $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$
$C_\omega 6$ $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$
$C_\omega 7$ $\vdash B \rightarrow (A \vee B)$
$C_\omega 8$ $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
$C_\omega 9$ $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
$C_\omega 10$ $\vdash A \vee \sim A$
$C_\omega 11$ $\vdash \sim\sim A \rightarrow A$

Nótese que $LD_\sim$ comparte con C_ω sólo los axiomas 1-9, ya que difieren en los axiomas específicos de la negación débil, porque mientras en LD la negación k está caracterizada sólo por las leyes de De Morgan, en C_ω está caracterizada por los axiomas $C_\omega 10$ y

$C_\omega 11$, i.e., por $A \vee \sim A$ y $\sim\sim A \rightarrow A$ respectivamente, los cuales, como ya vimos, no son teoremas en $LD_\sim$ (cfr. 6.2.2, II). Y viceversa, en C_ω, la negación no obedece las leyes de De Morgan (Da Costa y Guillaume, 1965). En particular, si a los axiomas de C_ω se le agrega la ley de De Morgan $\sim (A \wedge B) \rightarrow \sim A \vee \sim B$, se obtiene el cálculo más fuerte que C_ω, llamado $C_{\omega\sim}$. En $LD_\sim$, la negación es primitiva, mientras que en C_ω se la define como ya se mencionó.

Las peculiaridades deductivas de C_ω pueden comprenderse cabalmente a partir de las dos formulaciones al estilo Gentzen que Andrés Raggio realizó de C_ω, la primera en lógica de secuentes (1968) y la otra en deducción natural (1977). Dado que estas formulaciones contribuyen en forma esencial a la determinación de la noción de consecuencia lógica de C_ω, las reseñaremos brevemente en la próxima sección.

6.4 La noción de consecuencia lógica de la lógica paraconsistente

En tanto sistema de deducción natural, de ahora en más NC_ω, la formulación dada por Raggio tiene, para el fragmento que involucra sólo $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$, las mismas reglas de introducción y eliminación que las de NC. Pero, a diferencia de éste, NC_ω carece de las reglas de Introducción y Eliminación de la negación. Como única regla para la negación, tiene la Eliminación de la doble negación, o sea:

$$(E\sim\sim) \qquad \frac{\sim\sim A}{A}$$

Nótese que, por no contar con la regla Introducción de la negación, en una deducción, la premisa de la regla de Doble Negación nunca puede provenir de la aplicación de ella. La ausencia de esta regla explica por qué en NC_ω no es una inferencia válida ECQ. En efecto, si NC_ω tuviera la regla de Introducción de la negación, conjuntamente con $E\sim\sim$, resultaría válida ECQ. Asimismo, y por

igual motivo, resultan inválidas, entre otras, las inferencias clásicas *Modus Tollens*, Contraposición y Silogismo Disyuntivo y las leyes clásicas de interdefinición $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim A \vee B)$ y, obviamente, $\sim (A \wedge \sim A)$ y $\sim\sim A \leftrightarrow A$. Deseamos observar que la invalidez del Silogismo Disyuntivo y la validez del *Modus Ponens* producen un resultado paradójico parecido al provocado por la invalidez del primero en la lógica de la relevancia, a saber: la fórmula B puede ser derivada por MP de $(A \rightarrow B) \wedge A$, pero no puede obtenerse de $(A \vee B) \wedge \sim A$ por SD.

Pasemos ahora a examinar el sistema SC_ω en su formulación en lógica de secuentes (Raggio, 1968), para el cálculo SC_ω obtenido a partir de la lógica clásica LC, el cual, aunque al parecer del mismo Raggio no es totalmente apropiado, permite profundizar más en la noción de consecuencia de C_ω. Raggio afirma nuevamente que la única diferencia de SC_ω con el cálculo de secuentes de LC radica en la regla operatoria de Introducción de la negación en el prosecuente, que corresponde, como es sabido, a la Eliminación de la negación en los cálculos de deducción natural y propone reemplazarla por la Introducción de la doble negación en el prosecuente, o sea $\sim\sim\vdash$, a saber:

$$\sim\sim\dashv \qquad \frac{\Gamma, A \dashv \Omega}{\sim\sim A, \Gamma \dashv \Omega}$$

La ausencia de Introducción de la negación queda justificada ya que si fuera válida en SC_ω, también tendría prueba la regla ECQ y Contraposición, como se comprueba en sus respectivas pruebas clásicas, la primera de las cuales ya se dio en 5. 3 y la segunda se muestra a continuación:

$$5)\quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \dashv A \quad B \dashv B}{A, A \rightarrow B \dashv B}\ \rightarrow\dashv}{A \rightarrow B \dashv B, \sim A}\ \dashv\sim \ \oplus}{A \rightarrow B, \sim B \dashv \sim A}\ \sim\dashv \ \oplus}{A \rightarrow B \dashv \sim B \rightarrow \sim A}\ \dashv\rightarrow$$

Prima facie, parecería que SC_ω efectivamente no difiere de SC en relación con las reglas estructurales. Sin embargo, se presenta una dificultad con la conocida Ley de Peirce $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$. Recuerde el lector que esta ley tiene las siguientes características: (i) en Deducción Natural involucra en su prueba la negación clásica; (ii) no es demostrable a partir sólo de los axiomas implicativos de Hilbert (Bostock, 1997, 5.2), (iii) en SC tiene una prueba sin negación pero que involucra Atenuación en el postsecuente ($\dashv A$); y (iv) no es válida en C_ω, tal como lo prueba el mismo da Costa (1965). Además, si se analiza nuevamente la prueba de ECQ (cfr. 5.3), se observa que en ella también se hace uso de $\dashv A$. Por lo tanto, SC_ω no puede contener como regla estructural Atenuación en el Postsecuente (Hunter 1998). De esta forma, todo sistema paraconsistente equivalente a C_ω es posible calificarlo como constituyendo una lógica subestructural.

Por último, es interesante añadir que varios lógicos han tendido a considerar a la lógica paraconsistenete de da Costa como la dual de la lógica intuicionista, ya que mientras en esta última no son teorema ni el Principio del Tercero Excluido, ni la forma de la Doble Negación $\neg\neg A \rightarrow A$, sí lo son en C_ω, y viceversa, mientras que EFQ, el Principio de no contradicción y la forma de la Doble Negación $A \rightarrow \neg\neg A$ son rechazados en C_ω, son teoremas de la lógica intuicionista. Sin embargo, las leyes sobre la negación rechazadas en C_ω generan una negación mucho más débil que la negación intuicionista. En efecto, desde el punto de vista semántico, la negación de los sistemas de da Costa no es veritativo funcional de tal forma que ni siquiera les es aplicable el requisito de que A y $\sim A$ no tengan el mismo valor distinguido exigido por Rescher para la negación en las lógicas plurivalentes. Más aún, desde el punto de vista sintáctico, ha sido despojada de reglas de la negación clásica que algunos lógicos consideran indispensable poseer a los efectos de constituir una negación. En efecto, W. Lenzen (1998) considera que en ninguna lógica paraconsistente deben ser válidas en forma conjunta las inferencias $A \vdash \sim\sim A$ y $\sim\sim A \vdash A$, ya que, de serlo, la

negación sería la negación clásica, y tampoco puede resultar válida ECQ. Pero, adiciona inferencias que toda negación debe satisfacer si desea constituir una negación genuina, a saber: $\sim A \vdash \sim(A \wedge B)$, $\sim(A \vee B) \vdash \sim A$ y una forma debilitada de la Contraposición, si $A \vdash B$ entonces $\sim B \vdash \sim A$. Pero, como ni la negación de LD ni la de C_{ω}, satisfacen la Contraposición, entonces, según Lenzen, ninguna de ellas constituye una negación genuina. De ahí que, según nuestra opinión, sea más adecuado considerar, al menos a la negación de LD, como una negación concreta, tal como lo proponen los mismos autores, y no como una forma de negación, que aunque débil, sea una negación lógicamente genuina.

6.5 Otros sistemas de lógica paraconsistente

Como ya dijimos al comienzo, los sistemas de lógica paraconsistente constituyen una gran familia, en cuya clasificación no hay criterio uniforme tomado. Además de las lógicas no-adjuntivas de Jaskowski, motivadas por las posibles contradicciones que pueden darse en una discusión entre hablantes, y de las lógicas obtenidas por el agregado de negaciones débiles, tal como las tratadas en este libro, las más difundidas sean tal vez las relevantes. Es natural que así sea ya que, tal como se mostró en el capítulo 4, la lógica de la relevancia se caracteriza, entre otras propiedades, por el rechazo de la validez de la inferencia ECQ. Por ello, es posible sostener que todo sistema de lógica relevante es también un sistema paraconsistente. Recuérdese asimismo que el propio da Costa afirmó que sus sistemas podían construirse a partir del cálculo proposicional de R. Sin embargo, hay rasgos propios de R que creemos impiden identificar la lógica de la relevancia con la lógica paraconsistente. En primer lugar, porque mientras en la lógica de la relevancia el énfasis está puesto en la crítica al condicional material y en su reemplazo por el *entailment*, en la lógica paraconsistente, está puesto en la negación. En segundo lugar, porque en la lógica de la rele-

vancia la negación es un operador intensional sintácticamente mucho más fuerte (cfr. 4.2.4) que la negación paraconsistente, lo cual determina que, a menos que se trate de un sistema al estilo Priest, en las lógicas de la relevancia no se presupone que el mundo actual es por naturaleza inconsistente y, por ello, se rechaza el Principio de no contradicción y se permite la validez de contradicciones. Sin embargo, ya vimos que, al tratar el sistema multivalente de G. Priest (cfr. 5.4), es posible construir un sistema en el que no resultan válidas ni MP, ni ECQ ni la Falacia Positiva y que sea, por lo tanto, paraconsistente y relevante.

La posición de G. Priest origina el llamado por él mismo *dialeteismo*, cuyo supuesto principal es sostener que el mundo actual es inconsistente y que, por lo tanto, hay *dialetheias*, es decir, proposiciones que son verdaderas y falsas al mismo tiempo y que conforman contradicciones legítimamente verdaderas. Por ello, la corriente lógica inspirada en esta posición sustituye el clásico Principio de no Contradicción por una ley llamada *Ley de Contradicción*, la cual afirma que hay contradicciones verdaderas, o sea, que hay *dialetheias*. Obviamente éstas deberán ser teoremas en los sistemas paraconsistentes seguidores de esta corriente, y tendrán la forma $\vdash A \wedge \neg A$.

Desde las lógicas mutivaluadas se puede dar una respuesta natural al problema de la admisibilidad de contradicciones, sin necesidad de adoptar las exigencias de relevancia. Un interesante ejemplo lo constituye el sistema paraconsistente tetravalente B_4, creado por N. Belnap en 1977, y que se opina constituye una buena alternativa para los sistemas de negación débil (Hunter, 1998). El lenguaje B_4 contiene solamente $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ y cuatro posibles valores para cada proposición: *verdadero* (1), *falso* (0), *ambos* (10) o *ninguno* (–). La matriz de B_4 está determinada por las siguientes tablas:

A	–	0	1	10
¬A	–	1	0	10

A ∧ B

B \ A	–	0	1	10
–	–	0	–	0
0	0	0	0	0
1	–	0	1	10
10	0	0	10	10

A ∨ B

B \ A	–	0	1	10
–	–	–	1	1
0	–	0	1	10
1	1	1	1	1
10	1	10	1	10

Dejamos a cargo del lector reflexionar acerca de la consecuencias que apareja la caracterización de la negación establecida en la matriz de la negación.

6.6 Comentarios marginales: paraconsistencia y teoría freudiana del inconsciente

La debilidad de la negación de las lógicas paraconsistentes y la admisibilidad de contradicciones ha permitido, además de las aplicaciones a los problemas filosóficos señalados en 6.1, emplear la lógica paraconsistente, en particular la de da Costa, en el campo de la psicología, y específicamente en el análisis de la teoría freudiana sobre el inconsciente. Teniendo en cuenta, por un lado, la importancia intrínseca de esta línea de investigación y, por otro, la atención que creemos puede suscitar en los interesados en estos temas, esbozaremos a continuación las propuestas a las cuales hemos tenido acceso.

En 6.1 dijimos que uno de los primeros sistemas de lógica paraconsistentes surgió en Argentina en 1954 y se debió a F. G. Asenjo. Pues bien, en el año 1982, residente en ese entonces en la Universidad de Pittsburg, Asenjo publica un artículo titulado La verdad, la antinomicidad y los procesos mentales, en el cual propone un siste-

ma de lógica antinómica trivalente (LA), que pueda dar cuenta de proposiciones antinómicas, o sea, de contradicciones. El tercer valor de verdad # es interpretado como *verdadero y falso* y las matrices para la negación y el condicional son las siguientes:

p	no-p
V	F
(V & F)	(V & F)
F	V

p \ q	V	(V & F)	F
V	V	(V & F)	F
(V & F)	V	(V & F)	(V & F)
1	V	(V & F)	V

Advierta el lector que estas matrices coinciden plenamente con las matrices del sistema LP propuesto posteriormente por Priest (cfr. 5.4) y que, por lo tanto, involucran los mismos resultados, tanto sintácticos como semánticos que LP. Lo realmente interesante del mencionado artículo reside en la relación que establece el autor entre antinomicidad y procesos mentales. Parafraseando a Freud, sostiene que las ideas más contradictorias pueden coexistir y tolerarse mutuamente, en otras palabras, que impulsos contrarios existen en la vida mental sin cancelarse ni disminuir y que la negación no es, por lo tanto, una línea divisoria que separa tajantemente opuestos contradictorios. Más aún, citando a Nietzche, sostiene que la no-verdad tiene que ser reconocida como una condición de la vida y la verdad como el «tipo de error sin el cual el hombre no puede vivir». Precisamente para este tipo de procesos, el autor propone el tercer valor (V&F). Sin embargo, en lugar de desarrollar formalmente el sistema correspondiente, se extiende en analizar la antinomicidad de la vida mental y hasta esboza una clasificación tipológica de las antinomias mentales.

Al año siguiente y en la misma revista, Andrés Raggio publica un corto pero motivador artículo titulado Algunas observaciones sobre la filosofía de la lógica de Newton C. A. Da Costa. Luego de mostrar que la concepción clásica de la negación proviene de la escuela eleática y que la primer crítica contundente se debe a Brouwer,

se dedica a reflexionar sobre el porqué de la concepción de Freud sobre el inconsciente como ámbito de pura positividad, o sea, como un ámbito en el que no existen negaciones. Luego de analizar la cuestión sobre la base de algunos textos freudianos, adjudica la responsabilidad a la noción clásica de la negación involucrada en la lógica vigente en ese período, en tanto ella limita los juicios solamente a afirmar p o afirmar no-p. El tercer artículo de la tríada que presentamos, se debe a C. E. Caorsi y se titula La lógica paraconsistente y el primer modelo freudiano de la mente (1991) y está inspirado, según las propias palabras del autor, en las reflexiones de Raggio. Después de presentar el modelo freudiano del psiquismo y dos interpretaciones posibles del inconsciente, concluye que, de haber en él una negación, ella no puede ser la negación clásica, sino una negación paraconsistente. De lo contrario, argumenta, si intentamos comprender el mundo del inconsciente con la negación clásica, el sistema se trivializa. Finalmente concluye el artículo con una pregunta sumamente sugestiva: ¿en qué medida la neurosis no consiste precisamente en esa amenaza de trivialización? La relación entre negación y culpa parece sugerir una vía de respuesta.

Lecturas sugeridas

Una muy breve exposición en español de la lógica paraconsistente de da Costa se encuentra en el tomo 7 de la I.A.F.E, ya citada, de N.C. da Costa y R. Lewin. Para un tratamiento completo de las distintas formalizaciones de la dialéctica, remitimos a *La formalizzazione della dialettica*, complilado por Diego Marconi. Una excelente y sintética exposición de los cálculos C_n $(1 \leqslant n \leqslant \omega)$ como de la jerarquía que se genera en teoría de conjuntos paraconsistentes se encuentra en *On the Development of Paraconsistent Logic and da Costa Work*, de L. D'Ottamiano. Para una exposición general breve, rigurosa y sencilla remitimos al trabajo de Bryson Brown titulado On Paraconsistency, incluido en *A Companion to Philosophi-*

cal Logic. Una exposición excelente pero tendiente a la aplicación fundamentalmente computacional de la lógica paraconsistente se encuentra en el artículo de A. Hunter, Paraconsistent Logic, publicado en *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Menagement*, vol 2. Finalmente, para este tema o cualquier otro relacionado con los tratados en este libro, recomendamos como primeras lecturas introductorias los artículos pertinentes de la *Routledge Encyclopedia of Philosophy* y de la *Stanford Enciclopedia of Philosophy*, cuyos artículos están escritos por especialistas de renombre en el tema y están siempre seguidos de bibliografía actualizada.

Conclusión: reflexiones sobre el pluralismo lógico

Somos pluralistas en relación con la noción de consecuencia lógica. Sostenemos que hay más de un sentido por el cual los argumentos pueden ser deductivamente válidos y que todos esos sentidos son iguales y merecen igualmente ser considerados como ejemplos de validez deductiva. G. Restall (1999)

A pesar de que en el desarrollo de los capítulos anteriores hemos introducido algunas consideraciones filosóficas, deseamos finalizar con un capítulo dedicado especialmente a reflexionar sobre el problema que consideramos más importante en relación con la temática tratada, es decir, el problema de la unicidad de la lógica y la validez universal de los principios lógicos. Nuestro único propósito es el de motivar al lector a revisar la posición tradicionalmente aceptada, a la luz de los cambios sustanciales producidos en las investigaciones lógicas de los últimos años y a relacionarlos con los resultados alcanzados hoy en día por las ciencias cognitivas.

Desde sus orígenes hasta bien entrada la segunda mitad del siglo XX, o sea, desde Aristóteles hasta Frege, Russell, Carnap, entre otros, la lógica ha sido pensada como ciencia absoluta, completa e inalterable. Consecuentemente, las leyes o principios lógicos han sido concebidos como verdades a priori, analíticos y verdaderos en todo mundo posible, tal como lo sostuviera Leibniz. Esta posición fue defendida explícitamente por Bolzano y expuesta paradigmáticamente por Frege en sus argumentos contra el psicologismo. En efecto, en sus obras *Wissenschaftslehre* (*Teoría de la ciencia*) de 1837 y *Paradoxien des Unendlichen* (*Paradojas del infinito*) de 1851, Bolzano precisa en términos más rigurosos lo sostenido por Leibniz,

aportando ideas originales que marcarán el pensamiento lógico posterior, como por ejemplo que una proposición es un objeto real cuya verdad o falsedad es independiente de cualquier contexto, es decir, tópicamente neutral; que el concepto de verdad es objetivo, o sea que no es ni epistémico ni psicológico; y que una proposición es universalmente válida o lógicamente verdadera, cuando todas sus «variantes» son verdaderas. El pensamiento de Frege a este respecto está expuesto fundamentalmente en *Grundgesetze der Arithmetik* (*Leyes básicas de la aritmética*), escrito entre 1893-1903, que puede resumirse en los siguientes principios: 1) la matemática y la lógica tienen la misma naturaleza y sus leyes son exactas y precisas; 2) las leyes de la matemática y la lógica no se conocen por medio de la intuición ni son probadas por observaciones psicológicas, sino que son verdades *a priori* y analíticas; y 3) las leyes o principios lógicos son universales, en el sentido de que no son específicos de ningún dominio en particular, ni pertenecen a un contexto determinado, o sea, no están indexados a ninguna «especie».

Tal fue la aceptación de esta versión de la lógica –y tal vez también del modelo de racionalidad que ella genera– que hasta empiristas radicales como John Stuart Mill y N. Quine debieron debilitar su posición en el momento de analizar la naturaleza de las leyes lógicas. El primero, al admitir que las verdades necesarias correspondientes a la lógica formal son precisamente aquellas de las cuales no se puede concebir distintamente su contrario y son, por ello, producto de experiencias mentales universales (1959, pp. 182-185); y, el segundo, cuando después de haber afirmado en *Two Dogmas of Empiricism* que ni aun los principios lógicos eran inmunes a la revisión por la experiencia, los excluyó posteriormente en *Word and Object*.

Tal como lo hemos señalado en los capítulos correspondientes, los primeros sistemas lógicos divergentes de la lógica clásica, en particular los intuicionistas y multivalentes, se propusieron en las primeras décadas del siglo XX, y los actualmente más representativos, tales como los sistemas de lógica de la relevancia y los para-

consistentes, ya habían sido formulados en la década de 1970. De ahí que la problemática acerca de la relación de estos nuevos sistemas con la lógica clásica se haya incorporado a la filosofía de la lógica como cuestión fundamental recién con el clásico libro de Susan Haack, *Lógicas Desviadas*. Sin embargo, tampoco en el tipo de pragmatismo lógico sostenido por ella en ese libro, repetido en la versión ampliada de 1996, la lógica pierde su carácter universal. En efecto, pese a reconocerse que la lógica es revisable a la luz de la experiencia y a admitir la existencia de sistemas rivales de la lógica clásica, sólo se acepta el cambio de la lógica clásica por otra lógica alternativa pero igualmente universal, o sea, un cambio global. El argumento de Susan Haack en contra de la aplicabilidad limitada de los principios lógicos y la consiguiente oposición a las reformas locales de la lógica constituye, según nuestra opinión, un ejemplo paradigmático en defensa de la universalidad de la lógica. Expuesta sintéticamente, la argumentación es la siguiente: si cada dominio de discurso tuviera principios lógicos diferentes, entonces los principios lógicos no serían formales en el sentido de ser aplicables a cualquier contenido, o sea, no serían ni tópicamente neutrales, ni universales, tal como lo exigía Frege y, por lo tanto, no serían principios lógicos (1977, p. 45). Por ello, según S. Haack, si existieran buenas razones que hicieran necesario o conveniente un cambio de lógica, este debería consistir en un cambio global, el cual a su vez debería consistir en reemplazar la lógica clásica por una lógica alternativa supuestamente más adecuada que la lógica clásica, pero con principios que seguirían siendo tópicamente neutrales y universales.

En nuestra opinión, esta posición no soluciona el problema fundamental de la relación entre la lógica clásica y los sistemas supuestamente alternativos. En un trabajo titulado Nuestra Lógica (1982), F. Miró Quesada expresa acertadamente la problemática en cuestión cuando se pregunta: si existen principios lógicos necesarios y universales ¿por qué existen tantos sistemas de lógica diferentes? Y a continuación sostiene que la filosofía de la lógica pare-

ce encontrarse frente a la siguiente paradoja: «Si no hay un sistema privilegiado de lógica, entonces la lógica carece de sentido; pero los hechos muestran que existen diferentes sistemas de lógica y que, en consecuencia, no puede haber un sistema privilegiado». Cree que la paradoja puede ser superada y culmina su artículo afirmando que «cada tipo oracional exige un sistema deductivo específico, además de un sistema común».

En un trabajo anterior (1990) hemos argumentado teóricamente a favor de la tesis que sostiene la aplicabilidad limitada de los principios lógicos y que coincide en general con lo sostenido por Miró Quesada. En el presente texto hemos tratado de fortalecer esta posición mostrando, por un lado, que los sistemas lógicos analizados, pese a estar caracterizados por una noción de consecuencia más débil que la clásica, poseen una operación de consecuencia que satisface los axiomas de Tarski y, por el otro, que ellos se han construido a partir de la constatación de que, en dominios específicos, ciertas inferencias clásicas conducen a consecuencias indeseadas. De ello se sigue obviamente que los principios lógicos no son ni universales ni tópicamente neutrales y que, por lo tanto, no queda otro camino que renunciar a la aplicabilidad irrestricta de los principios lógicos y a la tradicionalmente admitida universalidad de los mismos. De esta forma, siguiendo la línea de Miró Quesada, cada sistema lógico expresa la normatividad propia de las inferencias de un dominio específico.

De acuerdo con lo dicho, es posible afirmar que las inferencias aceptadas por la matemática instuicionista constituyen un subconjunto de las inferencias aceptadas por la matemática clásica, constituido precisamente por el subconjunto acorde con las inferencias del fragmento constructivo de la matemática. Obviamente, la cuestión de si el fragmento formado por las demostraciones matemáticas no constructivas constituye o no matemática genuina, no es una cuestión a dirimir por la lógica. De manera similar, podría decirse que la lógica de la relevancia solo formaliza las inferencias deductivas características de los contextos en los cuales, además de

necesidad lógica, implican algún tipo de relevancia significativa; que los sistemas plurivalentes formalizan las inferencias válidas de los diversos contextos no regidos por la bivalencia; y que las lógicas paraconsistentes dan cuenta de la peculiaridad de las inferencias propia de los dominios en los cuales se admiten cierto tipo de contradicciones. Como es evidente, lo mismo puede sostenerse en relación con otros sistemas lógicos divergentes, tales como la lógica parcial, las lógicas libres, la lógica cuántica, ciertas lógicas dialógicas, la lógica linear, las gramáticas categoriales, etc.

Lo afirmado respecto de los sistemas divergentes puede también extenderse a los sistemas que constituyen extensiones de la lógica clásica. En efecto, si consideramos como lógica clásica la Lógica de Primer Orden, con o sin Identidad, es posible decir que ella también se aplica sólo a los dominios donde vale el Principio de Extensionalidad de Frege, como es el caso paradigmático de la matemática, mientras que los contextos intensionales necesitan de otros formalismos con principios lógicos específicos, tales como las lógicas modales, temporales o deónticas, ciertas lógicas condicionales, la lógica dinámica y ciertas lógicas de las preguntas (Åqvist y Belnap), etc. Finalmente, como se muestra en la literatura lógica, todos los sistemas mencionados tienen una relación u operación de consecuencia lógica característica y por lo tanto constituyen lógicas genuinas, y sus principios lógicos, aunque no universales y limitados a dominios específicos diferentes, constituyen también principios lógicos genuinos. En síntesis, sostener que todo sistema lógico caracterizado por una operación de consecuencia lógica específica, sea éste una extensión o divergente de la lógica clásica, debe considerarse como una lógica genuina constituye el punto crucial del pluralismo lógico que compartimos.

Advierta el lector que la posición asumida no conduce necesariamente a sostener que no existan sistemas alternativos o rivales en relación con un mismo dominio de discurso ni tampoco a afirmar que los sistemas lógicos son sistemas contexto-dependientes. Trataremos a continuación de fundamentar lo expresado. Respecto de

la primer cuestión, cabe agregar que, hoy en día, se admite que para un mismo dominio haya formalismos distintos que compartan o no la misma operación de consecuencia lógica y que, por ello, pueden ser considerados sistemas alternativos o rivales. Por ejemplo, hemos visto que, tanto desde las lógicas multivalentes como desde la lógica paraconsistente, a fin de dar cuenta de los contextos con predicados vagos e incluso de los contextos que involucran contradicciones se han propuesto sistemas lógicos diferentes. En general, dado un determinado contexto, nada impide que existan distintos formalismos que intenten modelizarlo. Será el lógico quien, en última instancia, se decidirá por el más adecuado a sus propósitos. Más aún, en el ámbito de las llamadas extensiones de la lógica clásica, respecto de las cuales generalmente no se presentan objeciones, también han surgido formalismos que pueden considerarse genuinamente rivales, como lo son los sistemas de R. Stalnaker y el de D. Lewis para el universo de los condicionales contrafácticos, ya que en el primero es válido el Principio del Tercero Excluido Contrafáctico, mientras que en el segundo no lo es.

Respecto de la segunda cuestión, cabe diferenciar los sistemas lógicos construidos para dominios de discurso específicos, como los que hemos tratado nosotros, de los formalismos que tienden a modelizar las inferencias cuya aceptación o rechazo depende del contexto o de la situación en la que se usan, como las llamadas inferencias «derrotables». Por ejemplo, dado el argumento: *Si el avión parte a las 14 horas del lunes del aeropuerto de Buenos Aires, entonces llega al aeropuerto de Madrid a las 18 horas del martes* y *el avión parte a las 14 horas del lunes del aeoropuerto de Buenos Aires, luego el avión llegará al aeropuerto de Madrid a las 18 horas del martes*, su conclusión será verdadera sólo si es verdadero el antecedente y el avión no debe efectuar una escala en un aeropuerto intermedio debido a un desperfecto mecánico. En otras palabras, la conclusión será verdadera a menos que ocurra alguna situación nueva que la «derrote». Esta clase de inferencias se caracterizan por no cumplir con la regla Refuerzo del Antecedente, $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow B)$. Por

ello, no cumplen con la propiedad de Monotonía (o Atenuación) de la relación de consecuencia lógica y su análisis es precisamente el objeto de las actualmente conocidas bajo el nombre de *lógicas no-monótonas*. El lector ya habrá comprendido que los sistemas divergentes no se ocupan de este tipo de inferencias, simplemente porque todos ellos, aun con conjuntos distintos de inferencias válidas, siguen siendo lógicas deductivas.

No queremos finalizar sin antes plantear ciertas cuestiones, para las cuales no hay una respuesta definitiva y que por lo tanto quedarán como problemas abiertos para la reflexión filosófica sobre la lógica y su naturaleza. La primera se refiere a si, entre los sistemas lógicos existentes, hay realmente uno privilegiado y, en particular, si éste no es precisamente la lógica clásica. En otras palabras, la cuestión radica en preguntarse si es posible sostener la supremacía de la lógica clásica frente a los restantes sistemas lógicos. Debe reconocerse que hay buenas razones para ello. En efecto, ya hemos mostrado que la noción de consecuencia lógica de la lógica clásica es la más fuerte, ya que ella posee todas las $Cn(\emptyset)$ y que, por lo tanto, todos los sistemas lógicos divergentes son deductivamente más débiles que ella. También puede argumentarse a favor de la lógica clásica, sosteniendo que en ella se hace referencia sólo a las relaciones de consecuencia entre proposiciones «en general», o sea, no prestando atención a las especificidades de los distintos dominios (Restall, 2000, p.1). Tal vez esta sea la idea de Miró Quesada cuando, en la repuesta a la paradoja por él formulada, incluye la expresión *además de un sistema común,* la cual autoriza a pensar que la lógica clásica es la que debe emplearse cuando se requiere un nivel de abstracción máximo frente a los contenidos particulares de un contexto. Sin embargo, de esto no se sigue que las inferencias clásicas sean de aplicación irrestricta, ya que, como hemos mostrado, en determinados dominios producen consecuencias indeseadas.

Un argumento conocido en contra del pluralismo lógico y tal vez a favor de la primacía de la lógica clásica consiste en preguntar a los pluralistas desde qué lógica hablan cuando analizan o compa-

ran sistemas lógicos. Miró Quesada, siguiendo a H.R. Meyer en su artículo Why I am not a relevantist (1978), postula la existencia de una lógica, que es la que usamos espontáneamente cuando pensamos racionalmente y que además es el fundamento en torno al cual se han constituido todas las demás lógicas, a la que él denomina precisamente *Nuestra Lógica.* Esta respuesta coincide con la de Restall y Beall (5/1999) cuando, apelando a la estrecha relación que existe entre *lógica* y *razonamiento,* pero respetando la independencia de la lógica, afirman que *toda lógica modeliza un tipo de razonamiento, pero no todo razonamiento necesita ser modelizado por una lógica y* nuestro razonamiento *sobre la lógica* no necesariamente constituye *una lógica* (obviamente, en el sentido de sistema lógico). Parece ser que ambas posiciones coinciden en postular un cierto tipo de lógica similar a la que hoy en día se acepta en ciencias cognitivas bajo el nombre de *lógica del sentido común* o *lógica natural.* Sin embargo, la relación entre lógica y razonamiento es crucial para entender la diferencia entre la posición de Miró Quesada y la de Restall y Beall, a la cual nosotros adherimos. En efecto, Miró Quesada afirma que cada sistema lógico formaliza distintos conjuntos de oraciones y, en este sentido, puede afirmarse que concibe a todo sistema lógico como un conjunto de verdades lógicas o teoremas, poniéndose así en la perspectiva tradicional basada sobre la relación entre lógica y lenguaje. Por su parte, Restall basa su posición en la relación lógica y razonamiento, de donde según su perspectiva, se sigue que los distintos sistemas lógicos son modelos que prescriben cómo se debe razonar dentro del campo específico de una disciplina, o sea, de un dominio particular de conocimiento.

Somos de la opinión de que la posición asumida por Restall y Beall respecto de la relación entre pluralismo lógico, lógica y razonamiento, tal como la hemos apenas esbozado, concuerda esencialmente con la concepción del conocimiento que en las ciencias cognitivas reúne más adeptos. En efecto, en el prólogo al libro *Cartografía de la mente,* L. A. Hirschfeld y S. Gelman (2002) afirman que, en nuestros días, las investigaciones sobre los procesos

cognitivos apuntan a determinar la especificidad de los mismos según el dominio al que refieran. Sobre la base de que los seres humanos están dotados de un conjunto de capacidades que se ponen en funcionamiento al emprender cualquier tarea cognitiva, sostienen que las capacidades cognitivas están en gran parte especificadas para manipular informaciones específicas. En síntesis, que gran parte de las capacidades humanas son dominio-específicas y que todo sujeto tiene la capacidad de reconocer las restricciones o peculiaridades que impone cada dominio. Sobre esta base, es consistente postular que hay una lógica para cada uno de estos dominios que, en tanto modelo, normativiza bajo la forma de inferencias válidas, las formas de razonar propias de tal dominio. Pero, como queda abierta la posibilidad de capacidades cognitivas de distinto grado de especificidad, también es posible seguir defendiendo la supremacía de la lógica clásica.

Referencias bibliográficas

Obras colectivas citadas

Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, vol. VII, *Lógica*, Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Ed.Trotta. (**EIAF**)

Gabbay, D.M. y Guenthner, F., Eds. (1986), *Handbook of Philosophical Logic.* vol., *Classical Logic*, vol. II, *Extension of Classical Logic* y vol. III, *Alternatives to Classical Logic*, Dordrecht/Boston/Londres: Reidel Publishing Company. (**HPhL**)

Gabbay, D.M. y Guenthner, F., Eds. (2002), *Handbook of Philosophical Logic*, Segunda Edición, 18 vols. Dordrecht/Boston/Londres: Kluwer Academic Publishers. (**HPhL2**)

Gabbay, D.M, Eds. (1994), *What is a Logical System*? Oxford: Science Publications: Oxford. (**WsLS**)

Gabbay, D.M. Y Wansing, H. eds. (1999), *What is Negation*?, Dordrecht/Boston/Londres: Kluwer Academic Publishers. (**WsN**)

Gabbay, M. y Smels, eds., *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management* vol. II, *Reasoning with Actual and Potential Contradictions*, Dordrecht/Boston/Londres: Kluwer Academic Publishers. (**HDR**)

Gamut, L.T.F, (2002), *Introducción a la lógica*, Buenos Aires: Eudeba.

Jaquette, Dale, Ed., (2002), *A Companion to Philosophical Logic*, Londres: Blackwell Publishers.

Routledge Encyclopedia of Philosophy, (1998), Version 1.0 (CD), Londres y Nueva York: Routledge.

Schroeder-Hester, P. y Dösen, K. Eds. (1993) *Substructural Logics*, Oxford: Oxford Science Publications, Clarendon Press. (**SbL**)

Stanford Encyclopedia of Philosophy, (publicanción *on line*, http://plato.stanford.edu).

Obras individuales

Ackermann, R. (1967). *Introduction to Many Valued L*ogics, Londres: Routledge & Kegan Paul Ltd., N., Dover Publications Inc.

Alchourrón, Carlos (1995). *Concepciones de la lógica*, en *EIAF*, vol. VII.

Anderson, Alan Ross (1963). Some Open Problems Concerning the System E of Entailment, ACTA PHILOSOPHICA FENNICA, fasc. XVI, Helsinki, pp. 7-18.

Anderson, A. R. y Belnap, N. (1975). *Entailment, The Logic of relevance and necessity*, New Jersey: Princeton University Press; tomo II, 1992.

Anderson, Alan Ross (1963). Some Open Problems Concerning the System E of Entailment, en ACTA PHILOSOPHICA FENNICA, fasc. XVI., Modal and Many-valued Logics, pp. 7-18.

Aristoteles, Prior and Posterior Analytics, en *The Works of Aristotle translated into English*, vol. I, 1928, Oxford: Clarendon Press.

Asenjo, F.G. (1982). La verdad, la antinomicidad y los procesos mentales, en *Revista latinoamericana de filosofía*, vol. VIII, n.º 1, pp. 15-36.

Belnap, N.D. (1962). Tonk, Plonk and Plink, *Analysis*, n.º 2.

Besnard, Ph. y Hunter, A., Introduction to Actual and Potential Contradiction, en (*HDR*), vol. II.

Beth, Evert. W. (1959). *The Foundations of Mathematics, A Study in the Philosophy of Science*, Nueva York: Harper & Row Publishers.

Bochenski, I. M. (1957). *Ancient Formal Logic*, Amsterdam: North Holland Publishing Company.

Bochenski, I. M. (1956). *Historia de la lógica formal*, Madrid: Gredos, 1976.

Bostock, D. (1997). *Intermediate Logic*, Oxford: Clarendon Press.

Brown, Bryson (2002). On Paraconsistency, en *CPhL*, pp. 628-650.

Caorsi, Carlos E. (1991). La lógica paraconsistente y el primer modelo freudiano de la mente, en *Revista latinoamericana de filosofía*, vol. XVII, n.º 1, pp. 117-132.

Carnap, R. (1937). *The Logical Syntax of Language*, Londres: Routledge & Kegan Paul Ltd.

—, (1947). *Meaning and Necessity. A Study in Sematics and Modal Logic.* Chicago: Phoenix Books, The University of Chicago Press.

Church, Alonzo (1956). *Introduction to Mathematical Logic*, Nueva Jersey: Princeton University Press.

Da Costa, C A. y Guillaume, M. (1965). Négations Composées et Loi de Peirce dans les Systèmes Cω*, en *Portugaliae Matematica*, vol. XXIV, fasc. IV, pp. 202-210.

Da Costa, N. y Lewin, Renato (1995). Lógica Paraconsistente, en *EIAF*, vol. VII.

Da Costa, N. y Marconi, Diego (1988). *An Overview of Paraconsistent Logic in the 80s, Logic Nova Akademie*, Berlín: Verlag.

Da Costa, N. y Wolf, R. (1980). Studies in Paraconsistent Logic I: Dialectical Principles of the Unity of Opposites, en *Philosophia, philosophical quarterly of Israel*, vol. IX, n.° 2, pp. 189-217.

Da Costa, N. (1982). The philosophical Import of Paraconsistent Logic, en *The journal of non-clasical Logic*, vol. I, n.° 1, pp.

D'Ottaviano, Itala, M.L., (1990) On the Development of Paraconsistent Logic and da Costa World, *Journal of Non-classical Logic*, vol. 7. n.° 1/2.

Dummett, M.A.E. (1973). The justification of deduction, *Annual Philosophical Lecture*, British Academy, vol. LIX, Oxford University Press.

—, (1977). *Elements of Intuitionism*, Oxford: Oxford University Press.

—, (1978). The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic, en *Truth and other enigmas*, Londres: Duckworth.

Dunn, M. (1986). Relevance Logic and Entailment, en *HPhL*, vol. III, *Alternatives to Classical Logic*, pp. 117-224.

Dunn, M., y Restall, G. (2002). Relevance Logic, en *HPhL*, segunda edición, pp. 1-128.

Etchemendy, John (1988). Tarski on Truth and Logical Consequence, en *Journal of symbolic logic*, vol. LIII, n.° 1.

Etchemendy, John (1990). *The Concept of Logical Consequence*, Cambridge: Harvard University Press.

Grandy, R. (2002). Many Valued, Free and Intuitionistic Logics, en *CPhL*, pp. 531-544.

Gentzen, G. (1955). *Recherches sur la déduction logique*, París: P.U.F.

Gomez Torrente, Mario (1999). *Forma y Modalidad*, Buenos Aires: Eudeba.

Haack, S. (1977). *Deviant Logic*, Cambridge: Cambridge University Press (Traducción al español en Ed. Paraninfo, 1980).

—, (1978). *Philosophy of logics*, Cambridge: Cambridge University Press, (traducción al español, Ed. Cátedra, 1982)

—, (1996). *Deviant Logic, Fuzzy Logic. Beyond the Formalism*, Chicago-Londres: The University of Chicago Press.

Hacking, J. (1979). What is logic? en *The Journal of philosophy*, vol. LXXVI, n.° 6 (también incluido en WsLS).

Hand, Michael (1999). Antirrealism and Falsity, en *WsN*, pp. 185-198.

Hájek, P. (2002). Why Fuzzi Logic?, en *CPhL*, pp. 595-605.

Heyting, A. (1976). *Introducción al intuicionismo*, Madrid: Tecnos.

Hilbert, D. y Ackermann, N. (1962). *Elementos de lógica teórica*, Madrid: Tecnos.

Hirschfeld, A. y Gelman, S., comp. (2002). *Cartografía de la mente*, Gedisa: Barcelona.

Hughes, G.E. y Creswell, M.J. (1996). *A New Introduction to Modal Logic, m*, Londres-Nueva York: Routledge. (Hay traducción al español de la primera edición, 1973, Madrid: Tecnos.)

Hunter, A. (1998). Paraconsistent Logic, en *HDR*, vol. II, pp. 11-35.

Kearns, J.T. (1978). Intuitionist Logic, a Logic of Justification, en *Studia Logica*, vol. XXXVII, pp. 243-259.

Kleene , Stephen C. (1964). *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam, North-Holland Publishing Co. (Ed. castellano, Madrid: Tecnos, 1978).

Kline, Morris (1985). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid: Siglo XXI.

Kneale, W. (l956). The Province of Logic, en *Contemporary British Philosophy*, H.D. Lewis Ed., Londres: G. Allen & Unwin Ltd.

Kneale, William & Martha (1972). *El desarrollo de la lógica*, Madrid: Tecnos.

Kneebone, G.T. (1963). *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Londres: Van Nostrand.

Kripke, S. (1959). The Problem of Entailment, en *Journal of symbolic logic*, 24.

Lear, J. (1980). *Aristotle and Logical Tehory*, en Cambridge: Cambridge University Press.

Lenzen, Wolfrang (1998). Necessary Conditions for Negation Operator (with particular application to paraconsistent logic), en *HDR*, vol. II, pp. 211-235.

Łukaziewicz, Jan (1957). *Aristotle's Syllogistic, From the Standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford: Clarendon Press.

Mares, E.D. (2002). Relevance Logic, en *CPhL*, pp. 607-609.

Malinowski, G. (2002). Many Valued Logic, en *CPhL*, pp. 545-564.

Martin-löf, Per (1996). On the Meaning of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws. *Nordic Journal of Philosophical logic*, vol. I, n.° 1, Scandinavian University Press (review *on line*).

Mates, Benson (1985). *Lógica de los estoicos*, Madrid: Tecnos.

Mendez, José M. (1995). Lógica de la Relevancia, en *IEAF*, T.7.

Mewer, R. K. (1978). Why I am not a relevantist, *Research Paper* n.° 1, R.S.S.S., Australian National University.

Mill, John Stuart (1959). *System of Logic*, Londres: Longman.

Miró Quesada, F. (1982). Nuestra lógica, en *Revista latinoamericana de filosofía*, vol. VIII, n.° 1, pp. 3-14.

Moretti, Alberto (1984). Gentzen y la naturalidad de la deducción, en *Análisis filosófico*, vol. IV, n.° 1, mayo 1984.

Orayen, R. (1989). *Lógica, significado y Ontología*, México: Universidad Autónoma de México.

Piérat-Le Bonniec, G. (1990). The Logic of Meaning and Meaningful Implication, en *Reasoning, Necessity and Logic: Developmental Perspectives*, Ed., W. F. Overton, Nueva Jersey, Londres: Lawrwnce Erlbaum Associates, pp. 67-86.

Palau, G. (1990). Lógicas divergentes y Principios lógicos, Un análisis crítico de algunas tesis de Susan Haack en *Revista latinoamericana de filosofía,* vol. XVI, n.° 1.

Palau, G. (1994). La noción de consecuencia lógica en Aristóteles, en *Análisis Filosófico,* vol. XIV, n.° 2, pp. 89-100.

Palau, G. (2001). La noción abstracta de consecuencia lógica, publicación *on line*: http://logicae.usal.es

Priest, G. (2001). *An Introduction to Non-Classical Logic,* Cambridge: Cambridge University Press.

—, (2002). Paraconsistent Logic, en *HPhL,* segunda edición, vol. VI, pp. 287-393.

Prior, A. N. (1962). *Formal Logic,* Oxford: Clarendon Press.

Quine, W. (l970). *Filosofía de la lógica,* Madrid: Alianza.

Raggio, A. (1968). Propositional sequence-calculi for inconsistence systems, en *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. IX, n°. 4. (web.sit)

—, (1977). A Proof- theoretic analysis of Da Costa's Cω, en *Proceedings of the 1st brazilian conference on mathematical logic,* Marcel Dekker, Nueva York. (web sit.)

—, (1983). Algunas observaciones sobre la filosofía de la lógica de Newton C.A. da Costa, en *Revista latinoamericana de filosofía,* vol. IX, pp. 237-241.

Read, Stephen (1995). *Thinking about Logic, An Introduction to the Philosophy of Logic,* Oxford/Nueva York: Oxford University Press.

Rescher, Nicholas (1969). *Many-valued Logic,* Nueva York: McGraw-Hill Company.

Restall, G. (2000). *An Introduction to Substructural Logics,* Londres/Nueva York: Routledge.

—, (1999). Defending Logical Pluralism, artículo(*on line*) escrito junto con J. Beall, versión de fecha mayo 17.

Ricco, Robert (1990). Necessity and the Logic of Entailment, en *Reasoning, Necessity and Logic: Developmental Perspectives,* Ed., W. F. Overton, Nueva Jersey, Londres: Lawrwnce Erlbaum Associates.

Smiley, T.J. (1973). What is Syllogism?, en *Journal of Philosophical Logic,* vol. III.

Stoll, R. (1963). *Set Theory and Logic,* Nueva York: Dover Publications.

Sundholm, G. (1983). Systems of Deduction, en *HPhL,* vol. I, *Elements of Classical Logic,* p. 133.

—, (1986). Proof Theory and Meanng, en *HPhL,* vol. III, *Alternatives to Classical Logic,* p. 471.

Tarski, A. (1930a). On Some Fundamental Concepts of Metamathematics, en *Logic, Semantics, Metamathematics,* translated by J. H. Woodger, Hackett Publishing Company.

—, (1930b). Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences, en *LSM,* p. 60.

—, (1933). The Concept of Truth in Formalized Languages, traducción inglesa en *LSM*, p. 153.

—, (1936), On the Concept of Logical Consequence, en *LSM*, p. 40.

Tirosh, Dina (1991). The Role of Students'Intuitions in Teaching the Cantorian Theory, en *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 102-127. Ed. David Tall, Mathematical Education Library, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Troelstra, A.S. y Van Dalen, D. (1988). *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, Amsterdam/Nueva York/Oxford/Tokio: North-Holland.

Urqhuart, Alasdair (1986). Many-valued Logic, en *HSL*, pp. 71-116.

Van Dalen, Dirk (1986). Intuitionistic Logic, en *HSL*, pp. 225-239.

Wójcicki, R. (1984). *Lectures on Propositional Calculi*, Ossolineum: The Publishing House of the Polish Academy of Science.

—, (1988). *Theory of logical calculi, Basic Theory of Consequence Operations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wolf, Robert (1978). ¿Are relevant logic deviant?, en *Philosophia, philosophical quaterly of Israel*, vol. VII.

Trillas, E. (1995). *Introducción a la lógica borrosa*, Barcelona: Ariel.

Índice temático y onomástico

BIBLIOTECA DE EDUCACIÓN
SERIE TEMAS DE CÁTEDRA